南京大学
Nanjing University

集合论的公理系统

集合是一个原始(primitive)概念，没有严格的定义，只有描述。

- 集合论创始人G. Cantor对集合的刻划：

> “吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。通常用大写字母表示集合，如 A、B、C 等，用小写字母表示元素，如a、b、c 等。若集合 A 系由 a、b、c 等诸元素所组成，则表如$A=\{a,b,c...\}$，而a为A之元素，亦常用 $a\in A$ 之记号表之者，a非A 之元素，则记如$a\notin A$。”　（肖文灿译于1939年，《集合论初步》，商务印书馆）

- 例：$\{1,2,3\}$为集合，自然数之全体为集合。而如甚大之数或与点P接近之点，则不能为集合，因其界限不清。
- 集合中的元素互异，我们把元素的重复出现看作一次出现，如$\{2,2,3,3\}=\{2,3\}$。

既然Cantor教授提到“总括之全体”，那么怎样“总括”呢？这里有两条重要原则：

- **外延原则**：集合由其元素完全决定，
  $A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$。
- **概括原则**：对于人们直观或思维之对象x的任一性质$P(x)$，存在集合S,其元素恰为具性质P的那些对象,记为$S = \{x|P(x)\}$。
  从而对任何a，$a \in S \leftrightarrow P(a)$。
  例：$\{1,2,3\} = \{x|x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$
  $\{2,4,6,\ldots\} = \{x|\ 2|x\}$

然由$\{x|P(x)\}$未必产生集合，B. Russell在1902年给出了反例，这就是著名的Russell悖论。

- Russell悖论：
  令$R=\{x|x\notin x\}$，从而若 R 为集合，则 $R\in R \leftrightarrow R\notin R$，从而矛盾，故 R 不为集合。

然由$\{x|P(x)\}$未必产生集合，B. Russell在1902年给出了反例，这就是著名的Russell悖论。

- Russell悖论：

  令$R=\{x|x\notin x\}$，从而若 R 为集合，则 $R\in R\leftrightarrow R\notin R$，从而矛盾，故 R 不为集合。

- 一位理发师："我给所有不给自己刮胡子的人刮胡子，也只给这些人刮胡子。"
- 那么，他能不能给自己刮胡子呢？

然由$\{x|P(x)\}$未必产生集合，B. Russell在1902年给出了反例，这就是著名的Russell悖论。

- Russell悖论：

  令$R = \{x|x \notin x\}$，从而若 R 为集合，则 $R \in R \leftrightarrow R \notin R$，从而矛盾，故 R 不为集合。

- 通过Russel悖论人们重新审视了集合论，修改概括原则，用形式方法讨论集合论，这样导致公理集合论的产生。

集合论语言为特殊的一阶语言：

1. 等词符：$\doteq$
2. 谓词符：$\in$(二元)
3. 常元符：$\varnothing$（空集符）
4. 函数符：无 (偶尔有对偶函数符$\{,\}$(二元)，幂集函数符$\mathcal{P}$(一元)，并集函数符$\cup$(一元))
5. 变元由 x,y,z 和 A,B,C 等表示

约定：

1. $A \subseteq B$指$\forall x(x \in A \to x \in B)$;
2. $x \notin A$指$\neg(x \in A)$;
3. {a}指{a,a};
4. a^+指$a \cup \{a\}$;
5. $A \cup B$指$\cup\{A, B\}$;
6. $A \cap B$指$\{x|x \in A \wedge x \in B\}$;
7. $(\forall x \in A)\varphi$ 指$\forall x(x \in A \to \varphi)$;
8. $(\exists x \in A)\varphi$指$\exists x(x \in A \wedge \varphi)$;

Zermelo与Fraenkel在20世纪初建立集合论的公理系统（ZF），用公理来刻划集合。

1. 外延性公理：

$$\forall A \forall B\,[\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B]$$

Zermelo与Fraenkel在20世纪初建立集合论的公理系统（ZF），用公理来刻划集合。

1. 外延性公理：　　集合由其元素完全决定

$\forall A \forall B [\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B]$

2. 空集公理：

$\exists B \forall x (\neg (x \in B))$

由外延性公理可知这样的B是唯一的，人们把这样的B称为空集，并记为$\varnothing$,

在有Russell的ι-算子的语言中，$\varnothing$即为$\iota B.\forall x(\neg(x \in B))$。

若S中有常元$\varnothing$,则空集公理为$\forall x (x \notin \varnothing)$;

3. 对偶公理:

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$$

这样的B存在唯一。若S中有函数$\{,\}$，则对偶公理为

$$\forall u \forall v (x \in \{u, v\} \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$$

恰以u,v为元素

3. 对偶公理：

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$$

这样的B存在唯一。若S中有函数$\{,\}$，则对偶公理为

$$\forall u \forall v (x \in \{u, v\} \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$$

4. 并集公理：

$$\forall A \exists B \forall x [x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A)(x \in b)]$$

这样的B是唯一的。若S中有函数$\cup$，则并集公理为

$\forall A \forall x (x \in \cup A \leftrightarrow (\exists b \in A)(x \in b))$。

取A为$\{u, v\}$，我们有$\forall x (x \in \cup\{u, v\} \leftrightarrow (\exists b \in \{u, v\})(x \in b))$，

从而 $\forall x (x \in u \cup v \leftrightarrow (x \in u \vee x \in v))$

恰以u,v为元素

3. 对偶公理：

$\forall u \forall v \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$

这样的B存在唯一。若S中有函数$\{,\}$，则对偶公理为

$\forall u \forall v(x \in \{u, v\} \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$

4. 并集公理：

$\forall A \exists B \forall x\,[x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A)(x \in b)]$

$\exists b(b \in A \wedge x \in b)$

这样的B是唯一的。若S中有函数$\cup$，则并集公理为

$\forall A \forall x(x \in \cup A \leftrightarrow (\exists b \in A)(x \in b))$。

取A为$\{u, v\}$，我们有$\forall x(x \in \cup\{u, v\} \leftrightarrow (\exists b \in \{u, v\})(x \in b))$，

从而 $\forall x(x \in u \cup v \leftrightarrow (x \in u \vee x \in v))$

3. 对偶公理：

恰以u,v为元素

$\forall u \forall v \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$

这样的B存在唯一。若S中有函数$\{,\}$，则对偶公理为

$\forall u \forall v(x \in \{u, v\} \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$

4. 并集公理：

$\forall A \exists B \forall x\left[x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A)(x \in b)\right]$

$\exists b(b \in A \wedge x \in b)$

这样的B是唯一的。若S中有函数$\cup$，则并集公理为

$\forall A \forall x(x \in \cup A \leftrightarrow (\exists b \in A)(x \in b))$。

取A为$\{u, v\}$，我们有$\forall x(x \in \cup\{u, v\} \leftrightarrow (\exists b \in \{u, v\})(x \in b))$，

从而 $\forall x(x \in u \cup v \leftrightarrow (x \in u \vee x \in v))$

对任何集合A，存在集合B，它元素完全是A的元素的元素。

5. 幂集公理：

$\forall a \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$

这样的B存在唯一，若S中有函数$\mathcal{P}$，则幂集公理为

$\forall x(x \in \mathcal{P}(a) \leftrightarrow x \subseteq a)$

5. 幂集公理：

$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$

这样的B存在唯一，若S中有函数$\mathcal{P}$，则幂集公理为

$\forall x (x \in \mathcal{P}(a) \leftrightarrow x \subseteq a)$

对于任何一个集合A，存在着一个集合B，它的元恰是A的各个子集。

6. 子集公理：

对于任何S-公式φ,若$FV(\varphi) = \{x_1, ..., x_k, x\}$且$B \notin FV(\varphi)$,则

$\forall \vec{x}\ \forall C \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x \in C \wedge \varphi))$。

5. 幂集公理：

$\forall a \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$

这样的B存在唯一，若S中有函数$\mathcal{P}$，则幂集公理为

$\forall x(x \in \mathcal{P}(a) \leftrightarrow x \subseteq a)$

6. 子集公理：

存在集合B由C中具有性质$\varphi(x)$的元素构成

对于任何S-公式φ,若$FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k, x\}$且$B \notin FV(\varphi)$,则

$\forall \vec{x}\ \forall C \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in C \wedge \varphi))$。

这样的B存在唯一且为C的子集，以Cantor的概括记号，

B可表示为$\{x | x \in C \wedge \varphi\}$ 或$\{x \in C | \varphi\}$,

这修正了原来的概括原则以避免Russell悖论。

事实上，$\{a, b\} = \{x | x = a \vee x = b\}$,

$\mathcal{P}(a) = \{x | x \subseteq a\}$, $\cup A = \{x | (\exists b \in A)(x \in b)\}$

5. 幂集公理：

$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$

这样的B存在唯一，若S中有函数$\mathcal{P}$，则幂集公理为

$\forall x (x \in \mathcal{P}(a) \leftrightarrow x \subseteq a)$

6. 子集公理：

存在集合B由C中具有性质$\varphi(x)$的元素构成

对于任何S-公式φ,若$FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k, x\}$且$B \notin FV(\varphi)$,则

$\forall \vec{x}\ \forall C \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x \in C \wedge \varphi))$。

这样的B存在唯一且为C的子集，以Cantor的概括记号，

B可表示为$\{x | x \in C \wedge \varphi\}$ 或$\{x \in C | \varphi\}$，

这修正了原来的概括原则以避免Russell悖论。

- 概括原则不加限制地将所有具有某性质$P(x)$的对象汇集为一个集合；
- 子集公理则考虑一个已经存在的集合，将其中具有性质$\varphi(x)$的对象汇集为一个集合.

7. 无穷公理：

$$\exists A(\varnothing \in A \wedge (\forall a \in A)(a^{+} \in A))$$

7. 无穷公理：

$\boxed{\exists A(\emptyset \in A \wedge (\forall a(a \in A \to a \cup \{a\} \in A))}$

$\exists A(\varnothing \in A \wedge (\forall a \in A)(a^+ \in A))$

这样的A不唯一。

称满足$\varnothing \in A \wedge (\forall a \in A)(a^+ \in A)$的$A$为归纳集，记为$\mathrm{Ind}(A)$。

取A为由无穷公理保证存在的归纳集，

令$\mathbb{N} = \{x | x \in A \wedge \forall B(Ind(B) \to x \in B)\}$

由子集公理知，这样的$\mathbb{N}$是存在的，$\mathbb{N}$被定义为自然数集。

若我们定义$0 \triangleq \varnothing, Suc(n) = n^+$

则可证$(\mathbb{N}, 0, Suc)$ 为Peano算术的模型。

7. 无穷公理：

$\exists A(\emptyset \in A \wedge (\forall a(a \in A \to a \cup \{a\} \in A))$

$\exists A(\varnothing \in A \wedge (\forall a \in A)(a^{+} \in A))$

这样的A不唯一。

称满足$\varnothing \in A \wedge (\forall a \in A)(a^{+} \in A)$的$A$为归纳集，记为$\mathrm{Ind}(A)$。

取A为由无穷公理保证存在的归纳集，

令$\mathbb{N} = \{x | x \in A \wedge \forall B(Ind(B) \to x \in B)\}$

由子集公理知，这样的$\mathbb{N}$是存在的，$\mathbb{N}$被定义为自然数集。

若我们定义$0 \triangleq \varnothing, Suc(n) = n^{+}$

则可证$(\mathbb{N}, 0, Suc)$ 为Peano算术的模型。

例，可定义自然数1和2：

- $1 = 0 \cup \{0\} = \{\} \cup \{0\} = \{0\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} = \{0,\{0\}\}$

8. 替换公理：

对于任何S-公式$\varphi(x,y)$,其不含B且$FV(\varphi)=\{x,y,t_1,...,t_k\}$，

$$\forall\vec{t}\ \forall A[(\forall x\in A)(\forall y_1\forall y_2(\varphi(x,y_1)\wedge\varphi(x,y_2)\to y_1\doteq y_2)$$
$$\to\exists B\forall y(y\in B\leftrightarrow(\exists x\in A)(\varphi(x,y))))],$$

用集合论记号，替换公理为：

对于函数F 和集合A，$F[A]$为集合。

8. 替换公理：

$\varphi(x,y)$可看成$f(x)=y$

对于任何S-公式$\varphi(x,y)$,其不含B且$FV(\varphi)=\{x,y,t_1,\dots,t_k\}$,

$\forall\vec{t}\ \forall A[(\forall x\in A)(\forall y_1\forall y_2(\varphi(x,y_1)\wedge\varphi(x,y_2))\to y_1\doteq y_2)$

$\to\exists B\forall y(y\in B\leftrightarrow(\exists x\in A)(\varphi(x,y))))]$,

$y\in B\leftrightarrow(\exists x(x\in A\wedge y=f(x)))$

用集合论记号，替换公理为：

对于函数F 和集合A，$F[A]$为集合。

9. 正则公理：

$\forall A(\neg(A=\varnothing)\to(\exists a\in A)(a\cap A=\varnothing))$

由正则公理知，不存在这样的链

$\dots\in a_{n+1}\in a_n\in\dots\in a_1\in a_0$ 且$A=\{a_0,a_1,\dots,\dots\}$

8. 替换公理:

$\varphi(x,y)$可看成$f(x)=y$

对于任何S-公式$\varphi(x,y)$,其不含B且$FV(\varphi)=\{x,y,t_1,\ldots,t_k\}$,

$$\forall\vec{t}\ \forall A[(\forall x\in A)(\forall y_1\forall y_2(\varphi(x,y_1)\wedge\varphi(x,y_2))\to y_1\doteq y_2)$$
$$\to\exists B\forall y(y\in B\leftrightarrow(\exists x\in A)(\varphi(x,y))))],$$

$y\in B\leftrightarrow(\exists x(x\in A\wedge y=f(x)))$

用集合论记号，替换公理为:

对于函数F 和集合A，$F[A]$为集合。

9. 正则公理:

$$\forall A(\neg(A=\varnothing)\to(\exists a\in A)(a\cap A=\varnothing))$$

$\forall x(x\in A\to x\notin a\}$

由正则公理知，不存在这样的链

$$\ldots\in a_{n+1}\in a_n\in\ldots\in a_1\in a_0\ \text{且}A=\{a_0,a_1,\ldots,\ldots\}$$

8. 替换公理：

$\varphi(x,y)$可看成$f(x)=y$

对于任何S-公式$\varphi(x,y)$,其不含B且$FV(\varphi)=\{x,y,t_1,\ldots,t_k\}$,

$$\forall\vec{t}\ \forall A[(\forall x\in A)(\forall y_1\forall y_2(\varphi(x,y_1)\wedge\varphi(x,y_2))\rightarrow y_1\doteq y_2)$$

$$\rightarrow\exists B\forall y(y\in B\leftrightarrow(\exists x\in A)(\varphi(x,y))))],$$

$y\in B\leftrightarrow(\exists x(x\in A\wedge y=f(x)))$

用集合论记号，替换公理为：

对于函数F 和集合A，$F[A]$为集合。

9. 正则公理：

$$\forall A(\neg(A=\varnothing)\rightarrow(\exists a\in A)(a\cap A=\varnothing))$$

$\forall x(x\in A\rightarrow x\notin a\}$

由正则公理知，不存在这样的链

不存在以自身为元素的集合

$$\ldots\in a_{n+1}\in a_n\in\ldots\in a_1\in a_0\ \text{且}A=\{a_0,a_1,\ldots,\ldots\}$$

$\varphi(x,y)$可看成$f(x)=y$

8. 替换公理：

对于任何S-公式$\varphi(x,y)$,其不含B且$FV(\varphi)=\{x,y,t_1,\ldots,t_k\}$,

$$\forall\vec{t}\;\forall A[(\forall x\in A)(\forall y_1\forall y_2(\varphi(x,y_1)\wedge\varphi(x,y_2)\to y_1\doteq y_2)$$
$$\to\exists B\forall y(y\in B\leftrightarrow(\exists x\in A)(\varphi(x,y))))],$$

$y\in B\leftrightarrow(\exists x(x\in A\wedge y=f(x)))$

用集合论记号，替换公理为：

对于函数F和集合A，$F[A]$为集合。

9. 正则公理：

$$\forall A(\neg(A=\varnothing)\to(\exists a\in A)(a\cap A=\varnothing))$$

$\forall x(x\in A\to x\notin a\}$

由正则公理知，不存在这样的链

$$\ldots\in a_{n+1}\in a_n\in\ldots\in a_1\in a_0\text{ 且}A=\{a_0,a_1,\ldots,\ldots\}$$

不存在以自身为元素的集合

"无限递减的集合序列不存在"蕴涵正则公理

最后介绍一个极其重要的公理－
选择公理（Axiom of Choice,简记为AC）。

- 选择公理：

  $\forall A \exists \tau((\tau : P(A) - \{\varnothing\} \to A) \wedge (\forall B \in (P(A) - \{\varnothing\}))(\tau(B) \in B))$

  其中τ 被称为选择函数。

最后介绍一个极其重要的公理－
选择公理（Axiom of Choice,简记为AC）。

- 选择公理：

A的非空子集构成的集合，也称**集族**

$$\forall A \exists \tau((\tau : \underline{P(A)-\{\varnothing\}} \to A) \wedge (\forall B \in (P(A)-\{\varnothing\}))(\tau(B) \in B))$$

其中τ 被称为选择函数。

定义函数τ，此处“→”不是蕴含，是映射

最后介绍一个极其重要的公理－
选择公理（Axiom of Choice,简记为AC）。

- 选择公理：

  A的非空子集构成的集合，也称**集族**

  $$\forall A \exists \tau((\tau : P(A)-\{\varnothing\} \to A) \wedge (\forall B \in (P(A)-\{\varnothing\}))(\tau(B) \in B))$$

  定义函数τ，此处"→"不是蕴含，是映射

  其中τ 被称为选择函数。

  对于所有的集族，均存在选择函数。

- Zorn引理：

  设S为偏序集，若S中的每个链皆有界，则S有极大元。

AC与Zorn引理等价。

最后介绍一个极其重要的公理—
选择公理（Axiom of Choice,简记为AC）。

- 选择公理：

A的非空子集构成的集合，也称**集族**

$\forall A \exists \tau((\tau : P(A) - \{\varnothing\} \to A) \wedge (\forall B \in (P(A) - \{\varnothing\}))(\tau(B) \in B))$

其中τ 被称为选择函数。

定义函数τ，此处“→”不是蕴含，是映射

对于所有的集族，均存在选择函数。

- Zorn引理：

设S为偏序集，若S中的每个链皆有界，则S有极大元。

AC与Zorn引理等价。

良序定理：所有集合能被良序化。即，对任意集合，都存在一种排序方法，使得它的所有子集都有极小元。

"The Axiom of Choice is obviously true; the Well Ordering Principle is obviously false; and who can tell about Zorn's Lemma?"

- 选择公理：

A的非空子集构成的集合，也称**集族**

$\forall A \exists \tau((\tau : P(A) - \{\varnothing\} \to A) \land (\forall B \in (P(A) - \{\varnothing\}))(\tau(B) \in B))$

其中τ 被称为选择函数。

定义函数τ，此处"→"不是蕴含，是映射

对于所有的集族，均存在选择函数。

- Zorn引理：

设S为偏序集，若S中的每个链皆有界，则S有极大元。

AC与Zorn引理等价。

良序定理：所有集合能被良序化。即，对任意集合，都存在一种排序方法，使得它的所有子集都有极小元。

集合论的公理系统 ZF 是由公理1 - 9组成。

ZFC 指 ZF+AC。

我们有著名的独立性结果：

定理(1) $con(ZF) \Rightarrow con(ZF + AC)$

(2) $con(ZF) \Rightarrow con(ZF + \neg AC)$

即 AC 是独立于 ZF 的。

这样我们用一阶语言描述了集合论的公理系统 ZF。