完全性定理

一阶逻辑的完全性定理是数理逻辑的基本定理之一，非常重要。它由$K.\ G\ddot{o}del$于20世纪30年代证明。

本讲中我们给出带等词的一阶谓词演算的完全性定理，证明方法采用Henkin在20世纪50年代给出的方法，这里利用极大协调集的方法，故我们

- 首先引入无穷公式集的协调性和极大协调性，
- 然后定义带等词的一阶谓词演算Ge，
- 最后证明完全性定理。

协调性

定义6.1. 设Γ为公式集

(1) Γ**矛盾**指存在Γ的有穷集Δ，使得$\Delta \vdash$在G中可证；

(2) Γ**协调**指Γ不矛盾；

(3) Γ协调记为$\boldsymbol{Con(\Gamma)}$，Γ矛盾记为$\boldsymbol{Incon(\Gamma)}$。

例，$\{A, \neg A\}$

协调性

命题6.2. 以下4点等价：

(1) $Incon(\Gamma)$；

(2) 存在公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证；

(3) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$可证；

(4) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证。

证：$(1) \Rightarrow (2)$：$\Delta \vdash$可证$\Rightarrow \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} \Delta_i)$永真 $\Rightarrow \Delta \vdash A$且$\Delta \vdash \neg A$可证

协调性

命题6.2. 以下4点等价：

(1) $Incon(\Gamma)$；

(2) 存在公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证；

(3) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$可证；

(4) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证。

证：$(1) \Rightarrow (2)$：$\Delta \vdash$可证$\Rightarrow \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} \Delta_i)$永真$\Rightarrow \Delta \vdash A$且$\Delta \vdash \neg A$可证

$$\frac{\Delta \setminus \Delta_i, \Delta_i \vdash \quad \Delta_i \vdash A, \Delta_i}{\Delta \setminus \Delta_i, \Delta_i \vdash A} Cut$$

协调性

命题6.2. 以下4点等价：

(1) $Incon(\Gamma)$；

(2) 存在公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证；

(3) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$可证；

(4) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证。

证：$(2) \Rightarrow (3)$：$\Delta \vdash A$且$\Delta \vdash \neg A$可证

$\Rightarrow \Delta \vdash$可证（矛盾规则）

$\Rightarrow \Delta \vdash B$可证，对任何公式$B$

协调性

命题6.2. 以下4点等价：

(1) $Incon(\Gamma)$；

(2) 存在公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证；

(3) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$可证；

(4) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证。

证：$(3) \Rightarrow (4)$：$\Delta \vdash A$可证，对任何公式A

$\Rightarrow$对任何公式B，令$A = B \wedge \neg B$，则$\Delta \vdash B \wedge \neg B$ 可证

$\Rightarrow$对任何公式B，$\Delta \vdash B$和$\Delta \vdash \neg B$可证

协调性

命题6.2. 以下4点等价：

(1) $Incon(\Gamma)$；

(2) 存在公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证；

(3) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$可证；

(4) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证。

证：$(3) \Rightarrow (4)$：$\Delta \vdash A$可证，对任何公式A

$\Rightarrow$对任何公式B，令$A = B \wedge \neg B$，则$\Delta \vdash B \wedge \neg B$ 可证

$\Rightarrow$对任何公式B，$\Delta \vdash B$和$\Delta \vdash \neg B$可证

$$\dfrac{\dfrac{B, \neg B \vdash B}{B \wedge \neg B \vdash B} \wedge L \quad \Delta \vdash B \wedge \neg B}{\Delta \vdash B} Cut$$

协调性

命题6.2. 以下4点等价：

(1) $Incon(\Gamma)$；

(2) 存在公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证；

(3) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$可证；

(4) 对任何公式A，存在Γ的有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证。

证：(4) ⇒ (1)：$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证 ⇒ $\Delta \vdash$ 可证。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash}\neg L}{A \wedge \neg A \vdash}\wedge L \quad \dfrac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash A \wedge \neg A}\wedge R}{\Delta \vdash} Cut
$$

协调性

我们同理可证：

命题6.3. 以下4点等价：

(1) $Con(\Gamma)$；

(2) 对任何Γ的有穷子集Δ，$\Delta \vdash$在G中不可证；

(3) 对任何公式A，对任何Γ的有穷子集Δ，$\Delta \vdash A$不可证或$\Delta \vdash \neg A$不可证；

(4) 存在公式A，使对任何Γ的有穷子集Δ，$\Delta \vdash A$不可证。

极大协调性

定义6.4. 设Γ为公式集，Γ为**极大协调的**指：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式集Δ，若$Con(\Delta)$且$\Gamma \subseteq \Delta$，则$\Gamma = \Delta$。

极大协调性

命题6.5. Γ为极大协调的当且仅当：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式A，若$Con(\Gamma \cup \{A\})$，则$A \in \Gamma$。

极大协调性

命题6.5. Γ为极大协调的当且仅当：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式A，若$Con(\Gamma \cup \{A\})$，则$A \in \Gamma$。

定义6.4. 设Γ为公式集，Γ为**极大协调的**指：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式集Δ，若$Con(\Delta)$且$\Gamma \subseteq \Delta$，则$\Gamma = \Delta$。

极大协调性

命题6.5. Γ为极大协调的当且仅当：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式A，若$Con(\Gamma\cup\{A\})$，则$A\in\Gamma$。

定义6.4. 设Γ为公式集，Γ为**极大协调的**指：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式集Δ，若$Con(\Delta)$且$\Gamma\subseteq\Delta$，则$\Gamma=\Delta$。

证："⇒"：设Γ为极大协调，从而$Con(\Gamma)$，

现设$Con(\Gamma\cup\{A\})$，因为$\Gamma\subseteq\Gamma\cup\{A\}$，

故$\Gamma\cup\{A\}=\Gamma$，即$A\in\Gamma$；

极大协调性

命题6.5. Γ为极大协调的当且仅当：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式A，若$Con(\Gamma \cup \{A\})$，则$A \in \Gamma$。

定义6.4. 设Γ为公式集，Γ为**极大协调的**指：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式集Δ，若$Con(\Delta)$且$\Gamma \subseteq \Delta$，则$\Gamma = \Delta$。

证："$\Leftarrow$"：设$Con(\Gamma)$且对任何A有$Con(\Gamma \cup \{A\})$蕴含$A \in \Gamma$，

现设$Con(\Delta)$且$\Gamma \subseteq \Delta$，假设此时$\Gamma \neq \Delta$，从而有$A \in \Delta - \Gamma$，

又由$\Gamma \cup \{A\} \subseteq \Delta$，从而$Con(\Gamma \cup \{A\})$，故$A \in \Gamma$，矛盾。

极大协调性

命题6.6. 设Γ为极大协调的当且仅当：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式A，$A \in \Gamma$或$\neg A \in \Gamma$。

证："⇒"：设Γ为极大协调，(1)易见，现证明(2)，

反证法，假设$A \notin \Gamma$且$\neg A \notin \Gamma$，

由命题6.5知，$Incon(\Gamma \cup \{A\})$且$Incon(\Gamma \cup \{\neg A\})$，

从而存在Γ的有穷子集Δ_1和Δ_2，使得$\Delta_1, A \vdash$和$\Delta_2, \neg A \vdash$可证，

故$\Delta_1, \Delta_2 \vdash$可证，因此$Incon(\Gamma)$，矛盾。

(2) 对任何公式集Δ，若$Con(\Delta)$且$\Gamma \subseteq \Delta$，则$\Gamma = \Delta$。

极大协调性

命题6.6. 设Γ为极大协调的当且仅当：

(1) $Con(\Gamma)$ 且

(2) 对任何公式A，$A \in \Gamma$或$\neg A \in \Gamma$。

证："$\Leftarrow$"：设已有(1)和(2)，要证Γ为极大协调的，由命题6.5知，只需证若$Con(\Gamma \cup \{A\})$，则$A \in \Gamma$。

由(2)可知$A \in \Gamma$或$\neg A \in \Gamma$，而$\neg A \in \Gamma$与$Con(\Gamma \cup \{A\})$矛盾，故$\neg A \notin \Gamma$，因此只能$A \in \Gamma$。

(2) 对任何公式集Δ，若$Con(\Delta)$且$\Gamma \subseteq \Delta$，则$\Gamma = \Delta$。

极大协调性

命题6.7. 设Γ为极大协调集，A为公式，存在Γ的有穷子集Δ使$\Delta \vdash A$可证当且仅当$A \in \Gamma$。

证：“⇒”：设$\Delta \vdash A$可证，

假设$Incon(\Gamma \cup \{A\})$，则存在Γ的有穷子集Δ'，使$\Delta', A \vdash$可证，

故$\Delta, \Delta' \vdash$可证，与$Con(\Gamma)$矛盾，故$A \in \Gamma$。

“⇐”：易证。

命题6.8.

(1) 若Γ可满足，则$Con(\Gamma)$；

(2) 若Γ矛盾，则Γ不可满足。

证：

(1) 设Γ可满足，即存在模型(M, σ)，满足Γ。

假设$Incon(\Gamma)$，则存在Γ有穷子集Δ，使$\Delta \vdash A \wedge \neg A$可证。

由可靠性定理，知$\Delta \vDash A \wedge \neg A$。

又由 $M \vDash_\sigma \Gamma$ 知 $M \vDash_\sigma \Delta$，从而 $M \vDash_\sigma A \wedge \neg A$，矛盾。

(2)为(1)的逆否命题。 □

命题6.9. 设Γ为有穷公式集且$Con(\Gamma)$

(1) 若$\Gamma \vdash A$可证，则$Con(\Gamma \cup \{A\})$；

(2) 若$\Gamma \vdash A$不可证，则$Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$。

证：

(1) 设$\Gamma \vdash A$可证且$Con(\Gamma)$。

假设$Incon(\Gamma \cup \{A\})$，则存在有穷$\Delta \subseteq \Gamma$，$\Delta, A \vdash$可证。

故$\Gamma \vdash$可证（Cut规则），与$Con(\Gamma)$矛盾。

(2) 若$Incon(\Gamma \cup \{\neg A\})$，则$\Gamma, \neg A \vdash$可证，从而$\Gamma \vdash A$可证。

□

自然推理系统Ge

在以前给出一阶谓词演算的G系统中，没有出现等词≐，现在我们给出带等词的一阶谓词演算Ge（有些书中记为$G_=$）

定义6.10. Gentzen系统Ge由G加上以下3个等词公理组成：

(1) $\vdash s \doteq s$，这里s为任何项；

(2) $s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n \vdash f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)$，

这里f为任意n元函数，对于$i \leq n$，s_i和t_i为任何项；

(3) $s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n, p(s_1, \ldots, s_n) \vdash p(t_1, \ldots, t_n)$，

这里p为任何n元谓词（含等词），

对于$i \leq n$，s_i和t_i为任何项。

自然推理系统Ge

约定6.11.

(1) $\vec{t}$表示$(t_1, \ldots, t_n)$，$\vec{s}$表示$(s_1, \ldots, s_n)$，即采用矢量记法；

(2) $f(\vec{t})$表示$f(t_1, \ldots, t_n)$，f为n元函数；

(3) $p(\vec{t})$表示$p(t_1, \ldots, t_n)$，p为n元谓词；

(4) $(\vec{s} \doteq \vec{t})$表示$(s_1 \doteq t_1) \wedge (s_2 \doteq t_2) \wedge \ldots \wedge (s_n \doteq t_n)$。

自然推理系统Ge

命题6.12. 以下矢列在Ge中可证。

(1) $\vdash s \doteq s$；

(2) $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)$；

(3) $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq u \to s \doteq u)$；

(4) $\vdash (\vec{s} \doteq \vec{t}) \to f(\vec{s}) \doteq f(\vec{t})$；

(5) $\vdash (\vec{s} \doteq \vec{t}) \to (p(\vec{s}) \to p(\vec{t}))$。

这里s,t,u为任何项，f为任何n元函数，$\vec{s}, \vec{t}$的长度为n，以及p为任何n元谓词。

自然推理系统Ge

(2) $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)$；

$$\frac{}{\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)} \to R$$

自然推理系统Ge

(2) $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)$；

$$\dfrac{\dfrac{}{s \doteq t \vdash t \doteq s}\,Cut}{\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)} \to R$$

自然推理系统Ge

(2) $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)$；

$$\dfrac{\dfrac{s \doteq t, s \doteq s \vdash t \doteq s \quad \vdash s \doteq s}{s \doteq t \vdash t \doteq s}\, Cut}{\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)} \to R$$

自然推理系统Ge

(2) $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)$；

$$\cfrac{\cfrac{\boxed{s \doteq t, s \doteq s \vdash t \doteq s} \qquad \vdash s \doteq s}{s \doteq t \vdash t \doteq s}\,Cut}{\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)}\,\to R$$

$$\boxed{s \doteq t, s \doteq s, s \doteq s \vdash t \doteq s}$$

$$\boxed{s \doteq t, s \doteq s, p(s, s) \vdash p(t, s)}$$

自然推理系统Ge

命题6.13. 令Γe为以下句子组成的集合：

$$\forall x(x \doteq x), \forall \vec{x} \forall \vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \rightarrow f(\vec{x}) \doteq f(\vec{y})),$$
$$\forall \vec{x} \forall \vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \rightarrow (p(\vec{x}) \rightarrow p(\vec{y}))).$$

$\Gamma \vdash \Delta$在Ge中可证 当且仅当 $\Gamma e, \Gamma \vdash \Delta$在G中可证。

证：对证明树的结构做归纳。

自然推理系统Ge

归纳基础：即证若$\Gamma \vdash \Delta$在Ge中为公理，当且仅当$\Gamma e, \Gamma \vdash \Delta$在G中为公理。

"⇒"：若$\Gamma \vdash \Delta$为公理$\vec{s} \doteq \vec{t}, p(\vec{s}) \vdash p(\vec{t})$，则$\Gamma e, \Gamma \vdash \Delta$为

$\forall x(x \doteq x), \forall\vec{x}\forall\vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \to f(\vec{x}) \doteq f(\vec{y})), \forall\vec{x}\forall\vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \to (p(\vec{x}) \to p(\vec{y}))), \vec{s} \doteq \vec{t}, p(\vec{s}) \vdash p(\vec{t})$

$$\frac{\ldots, \vec{s} \doteq \vec{t} \to (p(\vec{s}) \to p(\vec{t})), \vec{s} \doteq \vec{t}, p(\vec{s}) \vdash p(\vec{t})}{\ldots, \forall\vec{x}\forall\vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \to (p(\vec{x}) \to p(\vec{y}))), \vec{s} \doteq \vec{t}, p(\vec{s}) \vdash p(\vec{t})}\forall L$$

自然推理系统Ge

归纳基础：即证若$\Gamma \vdash \Delta$在Ge中为公理，当且仅当$\Gamma e, \Gamma \vdash \Delta$在G中为公理。

“⇐”：若$\Gamma e, \Gamma \vdash \Delta$在G中为公理，则存在公式$A \in \Delta$且$A \in \Gamma e$或$A \in \Gamma$，后者显然有$\Gamma \vdash \Delta$为Ge中公理，下证明前者。

若$A = \forall\vec{x}\forall\vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \to f(\vec{x}) \doteq f(\vec{y}))$，则

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \vec{a} \doteq \vec{b} \vdash f(\vec{a}) \doteq f(\vec{b}), \Delta}{\Gamma \vdash \vec{a} \doteq \vec{b} \to f(\vec{a}) \doteq f(\vec{b}), \Delta} \to R}{\Gamma \vdash \forall\vec{x}\forall\vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \to f(\vec{x}) \doteq f(\vec{y})), \Delta} \forall R$$

例：

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \vdash A[\frac{y}{x}]}{\Gamma_1 \vdash \forall x. A(x)}\forall R \quad \Gamma_2 \vdash B(t)}{\Gamma \vdash \forall x. A(x) \land B(t)} \to R$$

$$\Downarrow$$

$$\cfrac{\cfrac{{\color{red}\Gamma e}, \Gamma_1 \vdash A[\frac{y}{x}]}{{\color{red}\Gamma e}, \Gamma_1 \vdash \forall x. A(x)}\forall R \quad \Gamma e, \Gamma_2 \vdash B(t)}{{\color{red}\Gamma e}, \Gamma \vdash \forall x. A(x) \land B(t)} \to R$$

例：若$\Gamma_1 \vdash A[\frac{y}{x}]$和$\Gamma_2 \vdash B(t)$在Ge中可证

归纳假设

蕴含$\Gamma e, \Gamma_1 \vdash A[\frac{y}{x}]$和$\Gamma e, \Gamma_2 \vdash B(t)$在G中可证

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash A[\frac{y}{x}]}{\Gamma_1 \vdash \forall x. A(x)}\forall R \quad \Gamma_2 \vdash B(t)}{\Gamma \vdash \forall x. A(x) \land B(t)} \to R$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma e, \Gamma_1 \vdash A[\frac{y}{x}]}{\Gamma e, \Gamma_1 \vdash \forall x. A(x)}\forall R \quad \Gamma e, \Gamma_2 \vdash B(t)}{\Gamma e, \Gamma \vdash \forall x. A(x) \land B(t)} \to R$$

归纳假设：(⇒) $\Gamma \vdash \Lambda$证明树呈形$\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1}{\Gamma \vdash \Lambda}$ (R_1)或$\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ (R_2)，

若$\Gamma_1 \vdash \Lambda_1$和$\Gamma_2 \vdash \Lambda_2$可证则$\Gamma e, \Gamma_1 \vdash \Lambda_1$和$\Gamma e, \Gamma_2 \vdash \Lambda_2$可证。

(⇐) $\Gamma e, \Gamma \vdash \Lambda$证明树呈形$\frac{\Gamma e, \Gamma_1 \vdash \Lambda_1}{\Gamma e, \Gamma \vdash \Lambda}$ (R_1)或$\frac{\Gamma e, \Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma e, \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma e, \Gamma \vdash \Lambda}$ (R_2)，

若$\Gamma e, \Gamma_1 \vdash \Lambda_1$和$\Gamma e, \Gamma_2 \vdash \Lambda_2$可证则$\Gamma_1 \vdash \Lambda_1$和$\Gamma_2 \vdash \Lambda_2$可证。

归纳步骤：(⇒) 若$\Gamma \vdash \Lambda$可证，对情况$\frac{\Gamma e, \Gamma_1 \vdash \Lambda_1}{\Gamma e, \Gamma \vdash \Lambda}$和情况

$\frac{\Gamma e, \Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma e, \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma e, \Gamma \vdash \Lambda}$均可由归纳假设知 $\Gamma e, \Gamma \vdash \Lambda$ 可证。

(⇐) 若$\Gamma e, \Gamma \vdash \Lambda$可证，对情况$\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1}{\Gamma \vdash \Lambda}$和$\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$也可由归纳假设知$\Gamma \vdash \Lambda$可证。

自然推理系统Ge

定理6.14. 若$\Gamma \vdash \Delta$在Ge中可证，则$\Gamma \vDash \Delta$。

证：只需证明3条等词公理是永真的。

以下将证明完全性定理：

若$\Gamma \vDash \Delta$，则$\Gamma \vdash \Delta$在Ge中可证。

Henkin集

定义6.15. 设Γ为公式集，Γ为**Henkin集**指

(1) Γ极大协调；

(2) 若$\exists x.\mathrm{A} \in \Gamma$，则有项t使$A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$。

Henkin集

定义6.16. 设$\mathscr{L}$为一阶语言且$\|\mathscr{L}\| = \aleph_0$, 令$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

定理6.17. 设 Φ 为公式集且$Con(\Phi)$, 则存在 $\mathscr{L}'$ 公式集 Ψ 使$\Psi \supseteq \Phi$ 且 Ψ 为 $\mathscr{L}'$ 的 Henkin 集。

证明: 设 $\mathscr{L}$ 的全体公式为 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots (n \in \mathbb{N})$。令

$$\begin{cases} \Psi_0 = \Phi \\ \Psi_{n+1} = \begin{cases} \Psi_n & ,\text{若} Incon(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n\} & ,\text{若} Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \text{且} \varphi_n \text{不呈形} \exists x.A \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\} & ,\text{若} Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \text{且} \varphi_n \text{呈形} \exists x.A \end{cases} \end{cases}$$

这里 c 为 $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 中不曾使用过的新常元。

而令

$$\Psi = \cup\{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

我们有：

(1) $\Phi \subseteq \Psi$;

(2) 对所有的$n \in \mathbb{N}$，$Con(\Psi_n)$;

(3) $Con(\Psi)$；

(4) 在 Ψ_n 中出现的新常元是有穷的；

(5) Ψ 极大协调；

(6) Ψ 为 Henkin 集。

证明如下：

(1) $\Phi \subseteq \Psi$ 易见;

(2) 对 n 归纳证明 $Con(\Psi_n)$ 如下：

$$\begin{cases}\Psi_n \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n\} \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\}\end{cases}$$

奠基：$n = 0 \quad \because \Psi_0 = \Phi \quad \therefore Con(\Psi_0)$

归纳假设：设 $Con(\Psi_n)$

归纳步骤：欲证 $Con(\Psi_{n+1})$

情况1. $Incon(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$, 从而 $\Psi_{n+1} = \Psi_n$,
故由 I.H.知 $Con(\Psi_{n+1})$；

情况2. $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$且$\varphi_n$ 不呈形 $\exists x.A$, 从而 $Con(\Psi_{n+1})$;

情况3. $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 且 φ_n 呈形 $\exists x.A$,

这时可设 $\varphi_n \equiv \exists x.A$, $\Psi_{n+1} = \Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\}$,

反设$Incon(\Psi_{n+1})$,从而存在有穷集 $\Delta' \subseteq \Psi_{n+1}$ 使$\Delta' \vdash$可证，

从而存在有穷集$\Delta \subseteq \Psi_n \cup \{\varphi_n\}$使$\Delta, A[\frac{c}{x}] \vdash$可证，

使其证明树为 T , 在 T 中将 c 替换成新变元 y,

从而$\Delta, A[\frac{y}{x}] \vdash$可证。因此由$\exists L$知$\Delta, \exists x. A \vdash$可证，

与 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 矛盾。

(3) 欲证 $Con(\Psi)$ 反设 $Incon(\Psi)$,

从而存在 Ψ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash$ 可证。

$\because \Delta$ 有穷，不妨设 $\Delta = \{A_1, \cdots, A_k\}$

$\therefore A_i(i = 1, 2, \cdots, k) \in \Psi = \cup\{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

故对每个 $i \leq k$, 有 n_i 使 $A_i \in \Psi_{n_i}$,

因此有 l 使对每个 $i \leq k$, $A_i \in \Psi_l$, 从而 $\Delta \subseteq \Psi_l$,

然而 $Con(\Psi_l)$, 与 $\Delta \vdash$ 可证矛盾。

(4) 对 n 归纳证明即可。

(5) 欲证Ψ 极大协调，由于已证 Ψ 协调，现只需证极大性。由前命题知，只需证若 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$，则 $\varphi_n \in \Psi$.

对任何公式A，若$Con(\Gamma \cup \{A\})$，则$A \in \Gamma$

(5) 欲证Ψ 极大协调，由于已证 Ψ 协调，现只需证极大性。

由前命题知，只需证若 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$，则 $\varphi_n \in \Psi$.

设 $Con(\Psi \cup \{\varphi_n\})$, 从而 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$,

从而 $\varphi_n \in \Psi_{n+1}$, 因此， $\varphi_n \in \Psi$;

(6) Ψ 为Henkin集，对于公式 $\exists x.A \in \Gamma$, 设 $\exists x.A$ 为 φ_n,

$\because \varphi_n \in \Psi \therefore Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$,

故 $A[\frac{c}{x}] \in \Psi_{n+1}$, 从而 $A[\frac{c}{x}] \in \Psi$。

$\square$

Henkin集

定理6.18. 若 Γ 为Henkin集，则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集,对照Hintikka集的定义逐条验证如下：

(1) 这里因为$Con(\Gamma)$;

(2) 设 $\neg\neg \in \Gamma$, $\because \neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore \Gamma \vdash A$ 可证，
又 $\because \Gamma$ 极大协调，$\therefore A \in \Gamma$;

(3) 设$A \to B \in \Gamma$, 反设$\neg A \notin \Gamma$且$B \notin \Gamma$, 由命题6.6,$A \in \Gamma$且$\neg B \in \Gamma$,
$\because A, A \to B \vdash B$ 可证，$\therefore B \in \Gamma$ 矛盾;

(4) 设 $\neg(A \to B) \in \Gamma$, $\because \neg(A \to B) \vdash A, \neg(A \to B) \vdash \neg B$ 可证，
$\therefore A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);

(5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\because A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证，$\therefore A, B \in \Gamma$;

Henkin集

定理6.18. 若 Γ 为Henkin集，则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集,对照Hintikka集的定义逐条验证如下：

(1) 这里因为$Con(\Gamma)$;

$\{A, \neg A\}$矛盾

(2) 设 $\neg\neg \in \Gamma$, $\because \neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore \Gamma \vdash A$ 可证，
又 $\because \Gamma$ 极大协调，$\therefore A \in \Gamma$;

(3) 设$A \to B \in \Gamma$, 反设$\neg A \notin \Gamma$且$B \notin \Gamma$, 由命题6.6,$A \in \Gamma$且$\neg B \in \Gamma$,
$\because A, A \to B \vdash B$ 可证，$\therefore B \in \Gamma$ 矛盾;

(4) 设 $\neg(A \to B) \in \Gamma$, $\because \neg(A \to B) \vdash A, \neg(A \to B) \vdash \neg B$ 可证，
$\therefore A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);

(5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\because A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证，$\therefore A, B \in \Gamma$;

1. 若公式A为原子公式，则A和$\neg A$不能都属于Ψ；

Henkin集

定理6.18. 若 Γ 为Henkin集，则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集,对照Hintikka集的定义逐条验证如下：

(1) 这里因为$Con(\Gamma)$;

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A \quad \neg\neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}$$

(2) 设 $\neg\neg \in \Gamma$, $\because \neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore \Gamma \vdash A$ 可证,
又 $\because \Gamma$ 极大协调，$\therefore A \in \Gamma$;

命题6.7

(3) 设$A \to B \in \Gamma$, 反设$\neg A \notin \Gamma$且$B \notin \Gamma$, 由命题6.6,$A \in \Gamma$且$\neg B \in \Gamma$,
$\because A, A \to B \vdash B$ 可证，$\therefore B \in \Gamma$ 矛盾;

(4) 设 $\neg(A \to B) \in \Gamma$, $\because \neg(A \to B) \vdash A, \neg(A \to B) \vdash \neg B$ 可证，
$\therefore A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);

(5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\because A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证，$\therefore A, B \in \Gamma$;

2. 若$\neg\neg A \in \Psi$，则$A \in \Psi$;

Henkin集

定理6.18. 若 Γ 为Henkin集，则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集,对照Hintikka集的定义逐条验证如下：

(1) 这里因为$Con(\Gamma)$;

(2) 设 $\neg\neg \in \Gamma$, $\because \neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore \Gamma \vdash A$ 可证，
又 $\because \Gamma$ 极大协调， $\therefore A \in \Gamma$;

(3) 设$A \to B \in \Gamma$, 反设$\neg A \notin \Gamma$且$B \notin \Gamma$, 由命题6.6,$A \in \Gamma$且$\neg B \in \Gamma$,

$\to L$ $\because A, A \to B \vdash B$ 可证， $\therefore B \in \Gamma$ 矛盾; $\Gamma \vdash B$可证

(4) 设 $\neg(A \to B) \in \Gamma$, $\because \neg(A \to B) \vdash A, \neg(A \to B) \vdash \neg B$ 可证，
$\therefore A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);

(5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\because A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证， $\therefore A, B \in \Gamma$;

3. 若$A \to B \in \Psi$，则 $\neg A \in \Psi$ 或 $B \in \Psi$;

Henkin集

定理6.18. 若 Γ 为Henkin集，则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集,对照Hintikka集的定义逐条验证如下：

(1) 这里因为$Con(\Gamma)$;

(2) 设 $\neg\neg \in \Gamma$, $\because \neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore \Gamma \vdash A$ 可证，
又 $\because \Gamma$ 极大协调，$\therefore A \in \Gamma$;

(3) 设$A \to B \in \Gamma$, 反设$\neg A \notin \Gamma$且$B \notin \Gamma$, 由命题6.6,$A \in \Gamma$且$\neg B \in \Gamma$,
$\because A, A \to B \vdash B$ 可证，$\therefore B \in \Gamma$ 矛盾;

(4) 设 $\neg(A \to B) \in \Gamma$, $\because \neg(A \to B) \vdash A, \neg(A \to B) \vdash \neg B$ 可证，
$\therefore A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);

(5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\because A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证，$\therefore A, B \in \Gamma$;

4. 若$\neg(A \to B) \in \Psi$，则 $A \in \Psi$ 且 $\neg B \in \Psi$；

Henkin集

定理6.18. 若 Γ 为Henkin集，则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集,对照Hintikka集的定义逐条验证如下：

(1) 这里因为$Con(\Gamma)$;

(2) 设 $\neg\neg \in \Gamma$, $\because$ $\neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore$ $\Gamma \vdash A$ 可证，
又 $\because$ Γ 极大协调，$\therefore$ $A \in \Gamma$;

(3) 设$A \to B \in \Gamma$, 反设$\neg A \notin \Gamma$且$B \notin \Gamma$, 由命题6.6,$A \in \Gamma$且$\neg B \in \Gamma$,
$\because$ $A, A \to B \vdash B$ 可证，$\therefore$ $B \in \Gamma$ 矛盾;

(4) 设 $\neg(A \to B) \in \Gamma$, $\because$ $\neg(A \to B) \vdash A, \neg(A \to B) \vdash \neg B$ 可证，
$\therefore$ $A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);

(5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\because$ $A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证，$\therefore A, B \in \Gamma$;

5. 若$A \wedge B \in \Psi$，则 $A \in \Psi$ 且 $B \in \Psi$；

(6) $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$, 反设 $\neg A \notin \Gamma$且$\neg B \notin \Gamma$，从而由命题6.6知

$A \in \Gamma$ 且 $B \in \Gamma$，$\because A, B \vdash A \wedge B$ 可证，

$\therefore A \wedge B \in \Gamma$ 与$\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ 矛盾;

$\Gamma \vdash A \wedge B$可证

(7)~(8) 同理可证；

6. 若$\neg(A \wedge B) \in \Psi$，则 $\neg A \in \Psi$ 或 $\neg B \in \Psi$；

(6) $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$, 反设 $\neg A \notin \Gamma$且$\neg B \notin \Gamma$，从而由命题6.6知 $A \in \Gamma$ 且 $B \in \Gamma$，$\because A, B \vdash A \wedge B$ 可证，$\therefore A \wedge B \in \Gamma$ 与$\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ 矛盾;

(7)~(8) 同理可证；

$\Gamma \vdash A[\frac{t}{x}]$可证

(9) 设 $\forall x.A \in \Gamma$, $\because \forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证, $\therefore A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

9. 若$\forall x.A \in \Psi$，则 $\forall t \in T$，$A\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi$；

(6) $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$, 反设 $\neg A \notin \Gamma$且$\neg B \notin \Gamma$，从而由命题6.6知 $A \in \Gamma$ 且 $B \in \Gamma$，$\because A, B \vdash A \wedge B$ 可证，

$\therefore A \wedge B \in \Gamma$ 与$\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ 矛盾;

(7)~(8) 同理可证；

(9) 设 $\forall x.A \in \Gamma$, $\because \forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证, $\therefore A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

(10) 设 $\neg\forall x.A \in \Gamma$, $\because \neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A$ 可证, $\therefore \exists x.\neg A \in \Gamma$,

又 $\because \Gamma$ 为Henkin集, $\therefore$ 有 t 使 $\neg A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

10. 若$\neg\forall x. A \in \Psi$，则 $\exists t \in T$，$\neg A\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi$；

(6) $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$, 反设 $\neg A \notin \Gamma$且$\neg B \notin \Gamma$，从而由命题6.6知

$A \in \Gamma$ 且 $B \in \Gamma$，$\because A, B \vdash A \wedge B$ 可证，

$\therefore A \wedge B \in \Gamma$ 与$\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ 矛盾;

(7)~(8) 同理可证;

(9) 设 $\forall x.A \in \Gamma$, $\because \forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证, $\therefore A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

(10) 设 $\neg\forall x.A \in \Gamma$, $\because \neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A$ 可证, $\therefore \exists x.\neg A \in \Gamma$,

又 $\because \Gamma$ 为Henkin集, $\therefore$ 有 t 使 $\neg A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

(11)~(12) 同理可证;

(13)~(17)由命题 6.7 即得。

等词公理

13. $t \doteq t \in \Psi$;

14. $t \doteq s \rightarrow s \doteq t \in \Psi$;

15. $t \doteq s \rightarrow (s \doteq \mathrm{u} \rightarrow \mathrm{t} \doteq \mathrm{u}) \in \Psi$;

……

完全性定理

定理6.19. 若 Γ 协调，则 Γ 可满足。

证明: Γ 协调

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \text{存在Henkin集 } \Psi \supseteq \Gamma \\
&\Rightarrow \quad \text{存在 } \Psi \text{ 使 } \Psi \supseteq \Gamma \text{ 且 } \Psi \text{ 为Hintikka集} \\
&\Rightarrow \quad \text{存在 } \Psi \text{ 使 } \Psi \supseteq \Gamma \text{ 且 } \Psi \text{ 可满足} \\
&\Rightarrow \quad \Gamma \text{ 可满足.}
\end{aligned}
$$

□

完全性定理

定理6.19. 若 Γ 协调，则 Γ 可满足。

证明: Γ 协调

$\Rightarrow$ 存在Henkin集 $\Psi \supseteq \Gamma$ 　定理6.17

$\Rightarrow$ 存在 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Gamma$ 且 Ψ 为Hintikka集 　定理6.18

$\Rightarrow$ 存在 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Gamma$ 且 Ψ 可满足 　Hintikka集可满足

$\Rightarrow$ Γ 可满足. $\square$

完全性定理

定理6.19. 若 Γ 协调，则 Γ 可满足。

证明: Γ 协调

$\Rightarrow$ 存在Henkin集 $\Psi \supseteq \Gamma$ 　定理6.17

$\Rightarrow$ 存在 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Gamma$ 且 Ψ 为Hintikka集 　定理6.18

$\Rightarrow$ 存在 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Gamma$ 且 Ψ 可满足 　Hintikka集可满足

$\Rightarrow$ Γ 可满足. □

命题6.8.

(1) 若Γ可满足，则$Con(\Gamma)$；

(2) 若Γ矛盾，则Γ不可满足。

完全性定理

定理6.20 (Completeness). $\Gamma \vdash A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vDash A$

证明: "$\Rightarrow$"为Soundness;

"$\Leftarrow$" 设 $\Gamma \vDash A$

情况1. $Incon(\Gamma)$, 易见 $\Gamma \vdash A$ 可证;

情况2. $Con(\Gamma)$,反设 $\Gamma \vdash A$ 不可证，从而 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$,
故有 $\mathbb{M}$ 和 σ 使 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$ 与 $\mathbb{M} \vDash_\sigma A$ 矛盾。

$\square$

完全性定理

定理6.20 (Completeness). $\Gamma \vdash A \iff \Gamma \vDash A$

证明: "$\Rightarrow$"为Soundness；

"$\Leftarrow$" 设 $\Gamma \vDash A$

情况1. $Incon(\Gamma)$, 易见 $\Gamma \vdash A$ 可证；

情况2. $Con(\Gamma)$,反设 $\Gamma \vdash A$ 不可证，从而 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$,
故有 $\mathbb{M}$ 和 σ 使 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$ 与 $\mathbb{M} \vDash_\sigma A$ 矛盾。

对于任何模型，若Γ可满足，则A可满足

$\square$

完全性定理

定理6.20 (Completeness). $\Gamma \vdash A \ \Leftrightarrow \ \Gamma \vDash A$

证明: "$\Rightarrow$"为Soundness;

"$\Leftarrow$" 设 $\Gamma \vDash A$

情况1. $Incon(\Gamma)$, 易见 $\Gamma \vdash A$ 可证;

情况2. $Con(\Gamma)$,反设 $\Gamma \vdash A$ 不可证，从而 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$,
故有 $\mathbb{M}$ 和 σ 使 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$ 与 $\mathbb{M} \vDash_\sigma A$ 矛盾。 □

有效性：对于任何模型，若满足Γ，则也满足A

定理6.19，Γ可满足且$\Gamma \cup \{\neg A\}$可满足

紧致性定理

定理6.21 (Compactness). 设 Γ 为公式集，若对任何 Γ 的有穷子集 Δ，有 Δ 可满足，则 Γ 可满足。

证明: 反设 Γ 不可满足，则 $Incon(\Gamma)$,
从而存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash A \wedge \neg A$,
从而 Δ 不可满足，矛盾。 $\square$

一阶逻辑的不可判定性

- **不可判定性（Church/Turing, 1936/1937）**：对给定公式集Γ和公式F，不存在一个算法能判断 $\Gamma \vDash F$ 是否成立且始终终止。
- **半可判定性**：但存在一个算法，对给定的 Γ 和 F，若$\Gamma \vDash F$，则可在有限步内检查这一事实。
  - 可以构造这样的算法，它在一阶逻辑自然推理系统中搜索 $\Gamma \vdash F$ 的证明树，若 $\Gamma \vdash F$ 是可证的，这算法最终能在有限步找到证明树；但是若不可证，则这样的算法不会终止。

皮亚诺算数公理（PA）

- 公理1：$\exists N.0 \in N$
  - 0是自然数
- 公理2：$\forall n \in N, \exists n'.n' \doteq S(n)$
  - 每个确定的自然数，有确定的后继
- 公理3：$\forall n \in N, \neg(S(n) \doteq 0)$
  - 0不是任何自然数的后继
- 公理4：$\forall a, b \in N, \neg(a \doteq b) \to \neg(S(a) \doteq S(b))$
  - 不同的自然数有不同的后继；
- 公理5：$\forall P \subseteq N, 0 \in P \wedge (n \in P \to S(n) \in P) \to (P \doteq N)$
  - 任意自然数的子集，如果0属于它且n属于它能推出S(N)也属于它，则它等价于自然数集（归纳公理）

哥德尔的不完全性定理

不完全性定理（Kurt Gödel, 1931）： 不存在一个一致的（相容的，无矛盾的）公理系统，可以在系统内证明所有的初等算术语言所表达的命题。

- $\nexists F \supseteq PA$且$Con(F), s.t. \forall A,$ 有$F \vDash A.$

也可以说，若一个公理体系至少蕴含了皮亚诺算术公理（PA），且如果它是一致的，那么它是不完备的。

- **完备**，指“对于任何可在这个公理体系内描述的命题，都可以在这个公理体系内得到判定，要么是正确的，要么是错误的”。
- 哥德尔构造的算术命题在包含ZFC的公理系统中也无法得到判定。

哥德尔的不完全性定理

简要证明过程：

- 对于公式 A，令 $\#A$ 表示 A 的哥德尔码。

- “一个序列的公式是否构成一个公式的证明”在所有包含PA的公理系统 F 中是可判定的，因此二元关系“x 是 y 的证明”是可以在 F 中表达的，记作 $\boldsymbol{Prf_F(x,y)}$，此处 x 和 y 为公式的哥德尔码。

- 公式y可证明可表示为$\exists x.Prf_F(x,y)$，简写为 $\boldsymbol{Prov_F(y)}$，则有

$$F \vdash A \Rightarrow F \vdash Prov_F(\#A).$$

哥德尔的不完全性定理

- 令$A(x)$表示F中任意只有一个自由变元的公式。

- 对角化引理：可以机械的构造公式 D，使得

$$F \vdash D \leftrightarrow A[\frac{\#D}{x}].$$

- 将对角化引理应用到 $\neg Prov_F(x)$，则存在公式G_F使得

$$F \vdash G_F \leftrightarrow \neg Prov_F[\frac{\#G_F}{x}],$$

则$F \vdash G_F$既不是可证的，也不是不可证的。 □

哥德尔的不完全性定理

- 令$A(x)$表示F中任意只有一个自由变元的公式。

- **对角化引理**：可以机械的构造公式 D，使得

$$F \vdash D \leftrightarrow A[\frac{\#D}{x}].$$

- 将对角化引理应用到 $\neg Prov_F(x)$，则存在公式G_F使得

$$F \vdash G_F \leftrightarrow \neg Prov_F[\frac{\#G_F}{x}],$$

则$F \vdash G_F$既不是可证的，也不是不可证的。 □

若$F \vdash G_F$可证，则$F \vdash Prov_F(\#G_F)$可证，
又由$F \vdash G_F \leftrightarrow \neg Prov_F(\#G_F)$可证知$F \vdash \neg G_F$可证，则Incon(F)。

哥德尔的不完全性定理

现证明对角化引理（给定公式A，$F \vdash A$可证，则存在公式D，使得$F \vdash D \leftrightarrow A[\frac{\#D}{x}]$可证）：

- 令 $sub(\#A(x), n) := \#A[\frac{n}{x}]$，此处n可以为任意公式的哥德尔码。

- 令 $S(x, y, z)$ 表示公式 $sub(x, y) \doteq z$，即 $S(x, y, z)$ 为真当且仅当

$$x = \#A(x), y = n, z = \#A[\frac{n}{x}].$$

- 给定任意只有一个自由变元的公式 $A(x)$，可以构造公式 $\exists y. (A(y) \wedge S(x, x, y))$，它只包含一个自由变元 x，记为 $B(x)$，令 $k := \#B(x)$。

哥德尔的不完全性定理

- 令 $D:=B[\frac{k}{x}]:=\exists y.(A(y)\wedge S(x,x,y)[\frac{k}{x}])$。
- 若令 $m:=\#D$，则 $sub(k,k)=sub(\#B(x),k)=\#B[\frac{k}{x}]=m$，因此

$$F\vdash\forall y.(S(x,x,y)[\frac{k}{x}]\leftrightarrow y\doteq x[\frac{m}{x}])$$

$$\Rightarrow\ F\vdash\exists y.(A(y)\wedge(S(x,x,y)[\frac{k}{x}]\leftrightarrow y\doteq x[\frac{m}{x}]))$$

$$\Rightarrow\ F\vdash\exists y.(A(y)\wedge S(x,x,y)[\frac{k}{x}])\leftrightarrow\exists y.(A(y)\wedge y\doteq x[\frac{m}{x}])$$

$$\Rightarrow\ F\vdash D\leftrightarrow\exists y.(A(y)\wedge y\doteq m)$$

$$\Rightarrow\ F\vdash D\leftrightarrow A[\frac{m}{x}].$$