一阶逻辑的自然推理系统

G系统的公理和规则

定义4.1. $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$为一阶逻辑公式的有穷集合。$\Gamma \vdash \Delta$ 称为矢列，Γ 为其前件，Δ 为其后件。G由如下公理和规则组成：

- 公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

G系统的公理和规则

定义4.1. $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$为一阶逻辑公式的有穷集合。$\Gamma \vdash \Delta$ 称为矢列，Γ 为其前件，Δ 为其后件。G由如下公理和规则组成：

- 公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
- 规则：

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \qquad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

G系统的公理和规则

$$\to L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \to B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \to R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \to B, \Theta}$$

$$\forall L: \frac{\Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda} \qquad \forall R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[\frac{y}{x}], \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \forall x. A(x), \Theta}$$

$$\exists L: \frac{\Gamma, A[\frac{y}{x}], \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \exists x. A(x), \Delta \vdash \Lambda} \qquad \exists R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[\frac{t}{x}], \exists x. A(x), \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \exists x. A(x), \Theta}$$

$$\text{Cut}: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

注： t为任意的项， y是新变元。

定理4.2. Cut规则可用其他规则导出。

证明树

定义4.3. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指

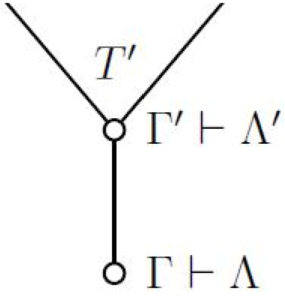
(1) 当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 G 的公理，以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为节点的单点树 T 为其证明树。

证明树

定义4.3. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指

(1) 当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 G 的公理，以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为节点的单点树 T 为其证明树。

(2) 当 $\frac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 G 的规则时，若 T' 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树，则树 T 如下为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

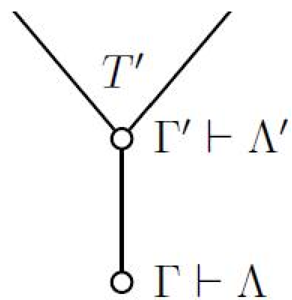


证明树

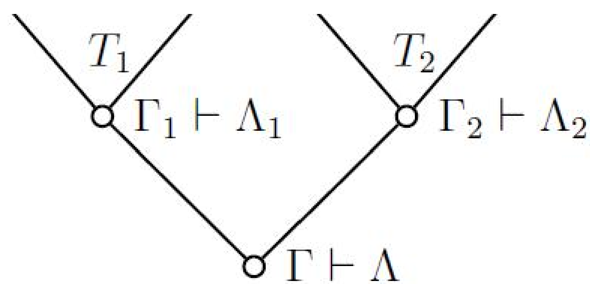
定义4.3. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指

(1) 当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 G 的公理，以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为节点的单点树 T 为其证明树。

(2) 当 $\frac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 G 的规则时，若 T' 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树，则树 T 如下为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。



(3) 当 $\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 G 规则时，若树 T_i 为 $\Gamma_i \vdash \Lambda_i$ 的证明树，则树 T 如下为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。



可证

定义4.4. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ 可证指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

可证

定义4.4. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ 可证指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

如何证明不可证？

例4.1. 证明下列矢列可证。

(1) $\vdash A \rightarrow A$

(2) $\vdash A \vee \neg A$

(3) $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$

例4.2. 证明下列矢列可证。

(1) $\vdash \forall x. A(x) \to A(t)$

(2) $\vdash A(t) \to \exists x. A(x)$

(3) $\vdash (\forall x. (P(x) \to Q(x)) \land P(t)) \to Q(t)$

这里 $A(t)$ 为 $A[\frac{t}{x}]$ 的简写，$P(t)$和$Q(t)$同理。

例4.2. 证明下列矢列可证。

(1) $\vdash \forall x. A(x) \to A(t)$

例4.2. 证明下列矢列可证。

(1) $\vdash \forall x. A(x) \to A(t)$

证：

$$\dfrac{\dfrac{A(t), \forall x. A(x) \vdash A(t)}{\forall x. A(x) \vdash A(t)}\forall L}{\vdash \forall x. A(x) \to A(t)} \to R$$

$\square$

例4.2. 证明下列矢列可证。

(2) $\vdash A(t) \to \exists x. A(x)$

例4.2. 证明下列矢列可证。

(2) $\vdash A(t) \to \exists x.A(x)$

证：

$$\dfrac{\dfrac{A(t) \vdash A(t), \exists x.A(x)}{A(t) \vdash \exists x.A(x)}\exists R}{\vdash A(t) \to \exists x.A(x)} \to R$$

□

例4.2. 证明下列矢列可证。

(3) $\vdash (\forall x.(P(x) \to Q(x)) \wedge P(t)) \to Q(t)$

例4.2. 证明下列矢列可证。

(3) $\vdash (\forall x.(P(x) \to Q(x)) \land P(t)) \to Q(t)$

证：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.(P(x) \to Q(x)), P(t) \vdash P(t), Q(t) \quad Q(t), \forall x.(P(x) \to Q(x)), P(t) \vdash Q(t)}{P(t) \to Q(t), \forall x.(P(x) \to Q(x)), P(t) \vdash Q(t)} \to L}{\forall x.(P(x) \to Q(x)), P(t) \vdash Q(t)} \forall L}{\forall x.(P(x) \to Q(x)) \land P(t) \vdash Q(t)} \land L}{\vdash (\forall x.(P(x) \to Q(x)) \land P(t)) \to Q(t)} \to R$$

□

例4.3. 证明 $\forall x. P(x) \land \exists y. Q(y) \vdash P(f(v)) \land \exists z. Q(z)$ 可证。

例4.3. 证明 $\forall x.P(x) \wedge \exists y.Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z.Q(z)$ 可证。

证：引入新变元 y_1。

$$
\dfrac{\dfrac{P(f(v)), \forall x.P(x), \exists y.Q(y) \vdash P(f(v))}{\forall x.P(x), \exists y.Q(y) \vdash P(f(v))}\forall L \quad \dfrac{\dfrac{\forall x.P(x), Q(y_1) \vdash Q(y_1), \exists z.Q(z)}{\forall x.P(x), Q(y_1) \vdash \exists z.Q(z)}\exists R}{\forall x.P(x), \exists y.Q(y) \vdash \exists z.Q(z)}\exists L}{\dfrac{\forall x.P(x), \exists y.Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z.Q(z)}{\forall x.P(x) \wedge \exists y.Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z.Q(z)} \wedge L} \wedge R
$$

□

例4.4. 证明若 $\Gamma_1 \vdash A$ 和 $A \vdash \Gamma_3$ 可证，则 $\Gamma_1 \vdash \Gamma_3$ 可证。

例4.4. 证明若 $\Gamma_1 \vdash A$ 和 $A \vdash \Gamma_3$ 可证，则 $\Gamma_1 \vdash \Gamma_3$ 可证。

证：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A \vdash \Gamma_3}{\Gamma_1 \vdash \Gamma_3}\mathrm{Cut}$$

$\square$

命题4.5. $A_1,\ldots,A_m \vdash B_1,\ldots,B_n$可证 $\Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{n} B_i$ 可证。

证：$\Rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{A_1,\ldots,A_m \vdash B_1,\ldots,B_n}{\bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash B_1,\ldots,B_n} \wedge L}{\bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{n} B_i} \vee R$$

$\Leftarrow$

$$\frac{A_1,\ldots,A_m \vdash A_1,\ldots,A_m}{A_1,\ldots,A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i} \wedge R$$

$\therefore A_1,\ldots,A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i$ 可证。

$\Leftarrow$

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \vdash A_1, \ldots, A_m}{A_1, \ldots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i} \wedge R$$

$\therefore A_1, \ldots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i$ 可证。

$$\frac{B_1 \vdash B_1, \ldots, B_n \quad \ldots \quad B_n \vdash B_1, \ldots, B_n}{\bigvee_{i=1}^{n} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n} \vee L$$

$\therefore \bigvee_{i=1}^{n} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n$ 可证。

$\Leftarrow$

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \vdash A_1, \ldots, A_m}{A_1, \ldots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i} \wedge R$$

$\therefore A_1, \ldots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i$ 可证。

$$\frac{B_1 \vdash B_1, \ldots, B_n \quad \ldots \quad B_n \vdash B_1, \ldots, B_n}{\bigvee_{i=1}^{n} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n} \vee L$$

$\therefore \bigvee_{i=1}^{n} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n$ 可证。

$$\frac{\dfrac{A_1, \ldots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i \quad \bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{n} B_i}{A_1, \ldots, A_m \vdash \bigvee_{i=1}^{n} B_i}\mathrm{Cut} \quad \bigvee_{i=1}^{n} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n}{A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n}\mathrm{C}$$

$\square$

一些导出规则

(1) 反证法规则：

$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

一些导出规则

(1) 反证法规则：

$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

证：

$$\dfrac{\dfrac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\neg A, \Gamma \vdash \neg\neg B}\,\neg R, \neg L \qquad \dfrac{\neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\neg A, \Gamma, \neg\neg B \vdash}\,\neg L}{\neg A, \Gamma \vdash}\,\mathrm{Cut}$$

一些导出规则

(1) 反证法规则：

$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

证：

$$\cfrac{\cfrac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\neg A, \Gamma \vdash \neg\neg B}\neg R, \neg L \quad \cfrac{\neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\neg A, \Gamma, \neg\neg B \vdash}\neg L}{\neg A, \Gamma \vdash}\text{Cut}$$

$$\cfrac{\cfrac{\neg A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\neg R \quad \cfrac{A \vdash A}{\neg\neg A \vdash A}\neg L, \neg R}{\Gamma \vdash A}\text{Cut}$$

一些导出规则

(2) 分情况规则：

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

一些导出规则

(2) 分情况规则：

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

证：

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B, \neg A}\neg R \quad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}\mathrm{Cut}$$

□

一些导出规则

(3) 逆否推演：

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}$$

一些导出规则

(3) 逆否推演：

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}$$

证：

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A, B \quad A, B \vdash B}{A, A \to B \vdash B} \to L}{\neg B, A, A \to B \vdash} \neg L}{\neg B, A \to B \vdash \neg A} \neg R}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A} \to R}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A} \mathrm{Cut}$$

$\square$

一些导出规则

(4) 矛盾规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

一些导出规则

(4) 矛盾规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

证：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash A \quad A \vdash A, B}{\Gamma \vdash A, B}\text{Cut}}{\neg A, \Gamma \vdash B}\neg L \quad \cfrac{\Gamma \vdash \neg A \quad \neg A \vdash \neg A, B}{\Gamma \vdash \neg A, B}\text{Cut}}{\Gamma \vdash B}\text{Cut}$$

□

一些导出规则

(5) MP：

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

一些导出规则

(5) MP：

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

证：

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash A \quad \cfrac{A \vdash A, B \quad A, B \vdash B}{A, A \to B \vdash B} \to L}{\Gamma, A \to B \vdash B} \text{Cut} \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B} \text{Cut}$$

$\square$

一些导出规则

(6) 三段论：

$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \quad \Gamma \vdash \forall x.\,(A(x) \to B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$$

一些导出规则

(6) 三段论：

$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \quad \Gamma \vdash \forall x.(A(x) \to B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$$

证：

$$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x.(A(x) \to B(x)) \quad \dfrac{A(t) \to B(t), \forall x.(A(x) \to B(x)) \vdash A(t) \to B(t)}{\forall x.(A(x) \to B(x)) \vdash A(t) \to B(t)}\forall L}{\Gamma \vdash A(t) \to B(t)}\mathrm{Cut}$$

一些导出规则

(6) 三段论：

$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \quad \Gamma \vdash \forall x.(A(x) \to B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$$

证：

$$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x.(A(x) \to B(x)) \quad \dfrac{A(t) \to B(t), \forall x.(A(x) \to B(x)) \vdash A(t) \to B(t)}{\forall x.(A(x) \to B(x)) \vdash A(t) \to B(t)}\forall L}{\Gamma \vdash A(t) \to B(t)}\text{Cut}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \to B(t) \quad \Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash B(t)}\text{MP}$$

$\square$

G的语义性质

定义4.6. 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 为矢列，Γ 为 $\{A_1,\ldots,A_n\}$，Δ 为 $\{B_1,\ldots,B_m\}$，称 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效（记为 $\Gamma \vDash \Delta$）指 $\vDash (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i) \to (\bigvee_{j=1}^{m} B_j)$。特别地，

(1) 当 $n=0, m\neq 0$ 时，即 Γ 空时，$\vDash \Delta$ 指 $\vDash \bigvee_{j=1}^{m} B_j$；

(2) 当 $n\neq 0, m=0$ 时，即 Δ 空时，$\Gamma \vDash$ 指 $\vDash \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i)$；

(3) 当 $n=0, m=0$ 时，即 Γ、Δ 皆为空时，约定 $\{\} \vDash \{\}$ 不是有效的。

注：$\Gamma \vdash \Delta$ 有反例指 $\Gamma \vdash \Delta$ 非有效。

G的语义性质

命题4.7.

1) $A_1,\ldots,A_n \vdash B_1,\ldots,B_m$有效 iff 对任何模型$(M,\sigma)$，有 $M\vDash_\sigma \neg A_i, \exists i \in \{1,\ldots,n\}$ 或 $M\vDash_\sigma B_j, \exists j \in \{1,\ldots,m\}$。

$$\boxed{\vDash (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i) \to (\bigvee_{j=1}^{m} B_j)}$$

G的语义性质

命题4.7.

1) $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$有效 iff 对任何模型$(M, \sigma)$，有 $M \vDash_\sigma \neg A_i, \exists i \in \{1, \ldots, n\}$ 或 $M \vDash_\sigma B_j, \exists j \in \{1, \ldots, m\}$。

2) $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$有反例 iff 存在模型$(M, \sigma)$，使得 $M \vDash_\sigma A_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ 且 $M \vDash_\sigma \neg B_j, \forall j \in \{1, \ldots, m\}$。

$$\boxed{\vDash (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i) \to (\bigvee_{j=1}^{m} B_j)}$$

G的语义性质

引理4.8. G的公理有效。

$$\vDash (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i) \to (\bigvee_{j=1}^{m} B_j)$$

G的语义性质

引理4.9. 对于除Cut外的G中的规则，所有前提有效 iff 结论有效。

证：只需证对于规则，结论有反例 iff 至少一个前提有反例。

G的语义性质

引理4.9. 对于除Cut外的G中的规则，所有前提有效 iff 结论有效。

证：只需证对于规则，结论有反例 iff 至少一个前提有反例。

情况$\forall L$：设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{A_1, ..., A_m\}$，Λ 为 $\{B_1, ..., B_n\}$。

$\Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda$ 有反例

$\Leftrightarrow$ 存在模型(M, σ)，使得$M \vDash_\sigma A_i, \forall i \in \{1, ..., m\}$ 且 $M \vDash_\sigma \neg B_i, \forall i \in \{1, ..., n\}$ 且 $M \vDash_\sigma \forall x. A(x)$

$$\forall L: \frac{\Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}$$

G的语义性质

由$(A[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]}$，

可知$M \vDash_\sigma \forall x. A(x) \Rightarrow M \vDash_\sigma A[\frac{t}{x}]$。

$\therefore \Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda$ 有反例

$\Leftrightarrow$ 存在模型(M, σ)，使得$M \vDash_\sigma A_i, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ 且

$M \vDash_\sigma \neg B_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ 且 $M \vDash_\sigma \forall x. A(x)$且$M \vDash_\sigma A[\frac{t}{x}]$

$\Leftrightarrow \Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda$ 有反例。

其他情况同理可证。

$$\forall L: \frac{\Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}$$

G的语义性质

引理4.10. 对于Cut: $\frac{\Gamma\vdash\Lambda,A \quad \Delta,A\vdash\Theta}{\Gamma,\Delta\vdash\Lambda,\Theta}$，若 $\Gamma \vdash \Lambda, A$ 和 $\Delta, A \vdash \Theta$ 有效，则 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 有效，反之不然。

证：$\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$有反例

$\Rightarrow$ 存在模型(M, σ)，使得Γ, Δ中的所有公式为真，而Λ, Θ的所有公式为假

$\Rightarrow$ 当 $M \vDash_\sigma A$ 时，$\Delta, A \vdash \Theta$有反例，当 $M \vDash_\sigma \neg A$ 时，$\Gamma \vdash \Lambda, A$有反例

$\Rightarrow$ 至少一个前提有反例

G的语义性质

所以若两个前提都有效，则结论有效。

反之可举反例如下：

$$\frac{\vdash \neg A \quad \neg A \vdash A}{\vdash A}\text{Cut}$$

若$\vdash A$有效，则$\vdash \neg A$非有效。 □

G的可靠性

定理4.11（Soundness）. 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G中可证，则 $\Gamma \vDash \Delta$。

证：对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树的结构做归纳。

G的可靠性

定理4.11（Soundness）. 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G中可证，则 $\Gamma \vDash \Delta$。

证：对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树的结构做归纳。

归纳基础：当 $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理时，引理4.8已证。

归纳假设：$\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树中的前提都有效。

归纳步骤：情况1：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta}\ (R_1)$$

由归纳假设知 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$有效，从而由引理4.9知$\Gamma \vdash \Delta$有效。

引理4.8. G的公理有效。
引理4.9. 对于除Cut外的G中的规则，所有前提有效 iff 结论有效。

G的可靠性

情况2：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}\ (R_2)$$

由归纳假设知 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$和$\Gamma_2 \vdash \Delta_2$有效，从而由引理4.9和4.10知$\Gamma \vdash \Delta$有效。

□

引理4.9. 对于除Cut外的G中的规则，所有前提有效 iff 结论有效。
引理4.10. 对于Cut规则，若前提均有效，则结论有效，反之不然。

命题4.12. 若 $\Gamma \vdash \Lambda$ 可证，则 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 可证。

命题4.12. 若 $\Gamma \vdash \Lambda$ 可证，则 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 可证。

$$\cfrac{\cfrac{A(t), \forall x. A(x) \vdash A(t)}{\forall x. A(x) \vdash A(t)}\ \forall L}{\vdash \forall x. A(x) \to A(t)} \to R$$

$$\cfrac{\cfrac{\color{red}{\Delta}, A(t), \forall x. A(x) \vdash A(t), \color{red}{\Theta}}{\color{red}{\Delta}, \forall x. A(x) \vdash A(t), \color{red}{\Theta}}\ \forall L}{\color{red}{\Delta} \vdash \forall x. A(x) \to A(t), \color{red}{\Theta}} \to R$$

命题4.12. 若 $\Gamma \vdash \Lambda$ 可证，则 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 可证。

证：对 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树的结构做归纳。

归纳基础：当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为公理时，$\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 也是公理。

归纳假设：$\Gamma \vdash \Lambda$证明树呈形$\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1}{\Gamma \vdash \Lambda}$ (R_1) 或$\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ (R_2)且 $\Gamma_1, \Delta \vdash \Lambda_1, \Theta$和$\Gamma_2, \Delta \vdash \Lambda_2, \Theta$可证。

归纳步骤：对情况$\frac{\Gamma_1, \Delta \vdash \Lambda_1, \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$ (R_1) 和情况$\frac{\Gamma_1, \Delta \vdash \Lambda_1, \Theta \quad \Gamma_2, \Delta \vdash \Lambda_2, \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$ 均可由归纳假设知 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 可证。 □

下列矢列是否可证？（P为一元谓词）

(1) $\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \exists x. P(x)$

(2) $\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \forall x. P(x)$

下列矢列是否可证？（P为一元谓词）

(1) $\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \exists x. P(x)$

可证。

$$\frac{}{\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \exists x. P(x)} \to R$$

下列矢列是否可证？（P为一元谓词）

(1) $\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \exists x. P(x)$

可证。

$$\exists R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[\frac{t}{x}], \exists x. A(x), \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \exists x. A(x), \Theta}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{P(x)[\frac{y}{x}] \vdash \exists x. P(x)}\ \exists R}{\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \exists x. P(x)}\ \to R$$

下列矢列是否可证？（P为一元谓词）

(1) $\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \rightarrow \exists x.P(x)$

$$\exists R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[\frac{t}{x}], \exists x.A(x), \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \exists x.A(x), \Theta}$$

可证。

$$\cfrac{\cfrac{P(x)[\frac{y}{x}] \vdash P(x)[\frac{y}{x}], \exists x.P(x)}{P(x)[\frac{y}{x}] \vdash \exists x.P(x)}\ \exists R}{\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \rightarrow \exists x.P(x)}\ \rightarrow R$$

下列矢列是否可证？（P为一元谓词）

$(1) \vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \exists x. P(x)$

$(2) \vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \forall x. P(x)$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{?}{P(x)[\frac{y}{x}] \vdash \forall x. P(x)}\ \forall R}{\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \forall x. P(x)} \to R$$

下列矢列是否可证？（P为一元谓词）

$$(1) \vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \exists x. P(x)$$

$$(2) \vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \forall x. P(x)$$

$$\forall R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, {\color{red}A[\frac{y}{x}]}, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, {\color{red}\forall x. A(x)}, \Theta}$$

(2)

$$\cfrac{\cfrac{P(x)[\frac{y}{x}] \vdash P(x)[\frac{y}{x}]}{P(x)[\frac{y}{x}] \vdash \forall x. P(x)}\ \forall R}{\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \forall x. P(x)}\ \to R$$

下列矢列是否可证？（P为一元谓词）

(1) $\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \exists x. P(x)$

(2) $\vdash P(x)[\frac{y}{x}] \to \forall x. P(x)$

(2) 不可证。假设可证，则矢列有效，即$P(x)[\frac{y}{x}] \to \forall x. P(x)$为永真式。构造反例……

本讲小结

- G系统的公理和规则
- 证明树与可证
- 一些导出规则
- G的语义性质（有效）
- G的可靠性