一阶逻辑（三）

序列数

定义3.21. 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集，$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$。令

$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \triangleq \prod_{i=0}^{n} P_i^{a_i}$，这里$P_i$为第i个素数。

$$P_0 = 2$$

$$P_1 = 3$$

……

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

前168个素数

序列数

算数基本定理：给定$\forall N \in \mathbb{N}$且$N > 1$，若N不为素数，则N可以唯一分解成有限个素数的乘积，即$N = p_1^{a_1} \times \ldots \times p_n^{a_n}$。

- 存在性：必可写成素数的乘积；
- 唯一性：反证法，假设$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n} = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \ldots q_m^{b_m}$。

  引理：若素数p|ab，则p|a或p|b（由裴蜀定理证明）。

  考虑 $p_1 | q_1^{b_1} \times \ldots \times q_m^{b_m}$，由引理，$p_1 | q_1^{b_1}$或$p_1 | q_2^{b_2}$ …或 $p_1 | q_m^{b_m}$

  不妨设 $p_1 | q_1^{b_1}$，则$p_1 = q_1$。

  若$a_1 > b_1$，则$p_1^{a_1 - b_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n} = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \ldots q_m^{b_m}$，……

序列数

算数基本定理：给定$\forall N \in \mathbb{N}$且$N > 1$，若N不为素数，则N可以唯一分解成有限个素数的乘积，即$N = p_1^{a_1} \times \ldots \times p_n^{a_n}$。

命题3.22. 设$a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$。若$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle = \langle b_0, \ldots, b_m \rangle$，则$n = m$且$(\forall i \leq n)(a_i = b_i)$。

证明：由算数基本定理即得。

$\square$

序列数的第i个元素

定义3.23. 函数 $ep: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ 如下：

$\boldsymbol{ep(x,n)} \triangleq \boldsymbol{x}$**的素因子分解式中$\boldsymbol{P_n}$的幂次**。

例，设 $x = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$，

$x = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1$

$ep(x,0) = 2$，

$ep(x,1) = 1$，

$ep(x,2) = 0$，

$ep(x,3) = 0$，

$ep(x,4) = 1$。

序列数的第i个元素

定义3.23. 函数 $ep: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ 如下：

$\boldsymbol{ep(x,n) \triangleq x}$**的素因子分解式中**$\boldsymbol{P_n}$**的幂次**。

约定：$ep(x,n)$简写为$ep_n(x)$。

命题3.24. $ep_i\langle a_0, \ldots, a_n\rangle = a_i \ (i \leq n)$。

$$ep_i\langle a_0, \ldots, a_n\rangle = ep_i\left(\prod_{i=0}^{n} P_i^{a_i}\right)$$

一阶语言的符号集

定义3.25. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，由以下组成：

(1) 逻辑符集合：

$V \triangleq \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$；

$C \triangleq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$；

$Q \triangleq \{\forall, \exists\}$；

$E \triangleq \{\doteq\}$；

$P \triangleq \{(,), , \}$。

(2) 非逻辑符集合：

$\mathcal{L}_f = \{f_{ij} | i \in \mathbb{N}$且$j \in I_i\}$，

这里i为f_{ij}的元数，I_i呈形$\{0, \ldots, k\}$或$\mathbb{N}$。当$i = 0$时，f_{0j}为常元符。

$\mathcal{L}_P = \{P_{ij} | i \in \mathbb{N}$且$j \in J_i\}$，

这里i为P_{ij}的元数，J_i呈形$\{0, \ldots, k\}$或$\mathbb{N}$。当$i = 0$时，P_{0j}为命题符。

一阶语言的Gödel码

定义3.26（Gödel码）．设X为$\mathcal{L}$的符号、项或公式，以下定义X的Gödel码$\#X$：

(1) 逻辑符：

$$\#(x_n) = \langle 0, n\rangle,$$

$$\#(\neg) = \langle 1,0\rangle,$$

$$\#(\wedge) = \langle 1,1\rangle,$$

$$\#(\vee) = \langle 1,2\rangle,$$

$$\#(\rightarrow) = \langle 1,3\rangle,$$

$$\#(\forall) = \langle 2,0\rangle,$$

$$\#(\exists) = \langle 2,1\rangle,$$

$$\#(\doteq) = \langle 3,0\rangle,$$

$$\#(() = \langle 4,0\rangle,$$

$$\#()) = \langle 4,1\rangle,$$

$$\#(.) = \langle 4,2\rangle,$$

$$\#(,) = \langle 4,3\rangle。$$

一阶语言的Gödel码

(2) 非逻辑符：

$\#(f_{ij}) = \langle 5, i, j \rangle$，$i \in \mathbb{N}$且$j \in I_i$；

$\#(P_{ij}) = \langle 6, i, j \rangle$，$i \in \mathbb{N}$且$j \in J_i$。

(3) 项（对项 t 的结构作归纳定义 $\#t$ 如下）

(a) t为变元或常元时，#t已被定义；

(b) 设t为$f_{ij}(t_1, ..., t_i)$，

$$\#t = \langle \#f_{ij}, \#t_1, ..., \#t_i \rangle,$$

特别地，$\#f_{0j}$已被定义。

一阶语言的Gödel码

(4) 公式（对公式 A 的结构归纳定义 $\#A$ 如下）

(a) $\#(t \doteq s) = \langle \#(\doteq), \#t, \#s \rangle$；

(b) $\#(P_{ij}(t_1, \ldots, t_i)) = \langle \#(P_{ij}), \#t_1, \ldots, \#t_i \rangle$，

特别地，$\#(P_{0j})$已被定义；

(c) $\#(\neg A) = \langle \#(\neg), \#A \rangle$，

$\#(A * B) = \langle \#(*), \#A, \#B \rangle$，这里$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(d) $\#(\forall x. A) = \langle \#(\forall), \#(x), \#(.), \#A \rangle$，

$\#(\exists x. A) = \langle \#(\exists), \#(x), \#(.), \#A \rangle$。

一个例子

$$\#(\forall x_0 P_{2,6}(x_0, x_1))$$

$$= \langle \#(\forall), \#(x_0), \#(P_{2,6}(x_0, x_1))\rangle$$

$$= \langle\langle 2, 0\rangle, \langle 0, 0\rangle, \langle \#(P_{2,6}), \#(x_0), \#(x_1)\rangle\rangle$$

$$= \langle\langle 2, 0\rangle, \langle 0, 0\rangle, \langle\langle 6, 2, 6\rangle, \langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\rangle\rangle$$

$$= \langle\langle 2, 0\rangle, \langle 0, 0\rangle, \langle 9000000, 1, 3\rangle\rangle$$

$$= 2^4 \cdot 3 \cdot 5^{2^{9000000} \cdot 3 \cdot 5^3}$$

Gödel码——对应于语法对象

定理3.27. $\mathcal{L}$中的符号、项和公式对应唯一的一个自然数，即它的Gödel码，且可以机械地从Gödel码找出原来的$\mathcal{L}$的语法对象。

存在一个算法