南京大学
Nanjing University

一阶逻辑（二）

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \rightarrow M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$；

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$；

谓词符集 $\mathcal{L}_P = \{<\}$。

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$；

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$；

谓词符集 $\mathcal{L}_P = \{<\}$。

令 $\mathbb{N} = (N, I)$，其满足 $N = \{0,1,2,\ldots\}$，$I(0) = 0$，$I(S) = suc$，$I(+) =+$，$I(\cdot) =\times$，$I(<) =<$，称 $\mathbb{N}$ 为**初等算术的标准模型**

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

$I: \mathcal{L} \to ?$

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \rightarrow M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

符号

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

$I: \mathcal{L} \to ?$

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

$\mathcal{L}_c \to M$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

符号

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

$I: \mathcal{L} \to ?$

$\mathcal{L}_c \to M$

$\mathcal{L}_f \to F$

符号

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

$I: \mathcal{L} \to ?$

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

$\mathcal{L}_c \to M$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

$\mathcal{L}_f \to F$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

$\mathcal{L}_P \to \mathbf{B} \cup M^n$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

符号

结构（Structure）

定义（结构）3.10. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

$I: \mathcal{L} \to ?$

$\mathcal{L}_c \to M$

$\mathcal{L}_f \to F$

$\mathcal{L}_P \to \mathbf{B} \cup \mathcal{M}$

符号

$I(P) = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in \mathcal{M}$

例如，“<”可由$\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \ldots\}$表示

结构（Structure）

约定：c_M 表示 $I(c)$，f_M 表示 $I(f)$，且 P_M 表示 $I(P)$。

$\mathcal{L}$ 的结构给出了 $\mathcal{L}$ 的**元素的解释**。

- $I: \mathcal{L} \to M \cup F \cup \mathbf{B} \cup \mathcal{M}$

习惯上，用论域 M 代表结构 $\mathbb{M}$，即对 M 和 $\mathbb{M}$ 不加以区分。

赋值与模型

定义3.11. 设 $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots|n\in N\}$为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集，$\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射，即 $\sigma: V\to M$；

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M},\sigma)$，

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$-结构且 σ 为 M 上的赋值。

赋值与模型

定义3.11. 设 $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots|n\in N\}$为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集，$\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射，即 $\sigma: V\to M$；

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M},\sigma)$，

也写成 (M,σ)

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$-结构且 σ 为 M 上的赋值。

赋值与模型

定义3.11. 设 $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots|n\in N\}$为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集，$\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射，即 $\sigma: V\to M$；

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M},\sigma)$，

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$-结构且 σ 为 M 上的赋值。

也写成 (M,σ)

（$\mathcal{A}$的模型）对于 $\mathbb{N}=(N,I)$，其满足 $N=\{0,1,2,\ldots\}$，......

令 $\sigma(x_n)=n$，(N,σ) 为 $\mathcal{A}$ 的模型。

赋值与模型

定义3.11. 设 $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots|n\in N\}$为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集，$\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射，即 $\sigma: V\to M$；

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M},\sigma)$，

也写成 (M,σ)

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$-结构且 σ 为 M 上的赋值。

定义3.12. 令σ为赋值，记号$\sigma[x_i:=a]$为如下的赋值：

$$(\sigma[x_i:=a])(x_j)=\begin{cases}\sigma(x_j), & i\neq j\\ a, & i=j\end{cases}。$$

项的解释

定义3.13（项的解释）． 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项 t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

项的解释

定义3.13（项的解释）． 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

c_M为$I(c)$，f_M为$I(f)$

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,...,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},...,(t_n)_{M[\sigma]})$。

项的解释

定义3.13（项的解释）. 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

c_M为$I(c)$，f_M为$I(f)$

例，对$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，求$(+(x_1,S(x_7)))_{N[\sigma]}$。

$x_1 + S(x_7)$

项的解释

定义3.13（项的解释）． 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,...,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},...,(t_n)_{M[\sigma]})$。

c_M为$I(c)$，f_M为$I(f)$

例，对$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，求$(+(x_1,S(x_7)))_{N[\sigma]}$。

$I(+) =+$
$I(S) = suc$
$\sigma(x_1) = 1$
$\sigma(x_7) = 7$

$$(+(x_1,S(x_7)))_{N[\sigma]} = (x_1)_{N[\sigma]} + (S(x_7))_{N[\sigma]}$$

$$= \sigma(x_1) + suc(\sigma(x_7)) = 1 + suc(7) = 9$$

项的解释

定义3.13（项的解释）． 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项 t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

引理3.14. $t_{M[\sigma]} \in M$。

项的解释

定义3.13（项的解释）． 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项 t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

引理3.14. $t_{M[\sigma]} \in M$。

对项t的结构作归纳。

1. $(x_i)_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) = i$；
2. $0_{N[\sigma]} = I(0) = 0$；
3. $(S(x_i))_{N[\sigma]} = suc(\sigma(x_i)) = \sigma(x_i) + 1$；
4. $(+(x_i,x_j))_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) + \sigma(x_j)$；
5. $(\cdot\,(x_i,x_j))_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) \times \sigma(x_j)$。

命题的解释

在结构的定义中，把0元谓词P解释为$\mathbf{B} = \{T, F\}$中的元素，这里我们承认排中律。

$$I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$$

命题的解释

在结构的定义中，把0元谓词P解释为$\mathbf{B} = \{T, F\}$中的元素，

这里我们承认排中律。

$I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

论域 M 中的每个命题要么为真，要么为假，别无他选。

联结词的解释

我们把联结词解释为$\mathbf{B}$上的函数：

(1) 对$\neg$的解释$B_{\neg}: \mathbf{B} \to \mathbf{B}$：

X	T	F
$B_{\neg}(X)$	F	T

(2) 对$\wedge$的解释$B_{\wedge}$：

X	Y	$B_{\wedge}(X,Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$\wedge$	T	F
T	T	F
F	F	F

联结词的解释

(3) 对∨的解释$B_{\vee}$：

X	Y	$B_{\vee}(X, Y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

∨	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) 对→的解释$B_{\to}$：

X	Y	$B_{\to}(X, Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

→	T	F
T	T	F
F	T	T

联结词的解释

(3) 对∨的解释$B_{\vee}$：

与命题逻辑的语义是一致的

X	Y	$B_{\vee}(X,Y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

∨	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) 对→的解释$B_{\rightarrow}$：

X	Y	$B_{\rightarrow}(X,Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

→	T	F
T	T	F
F	T	T

公式的解释

定义3.15（公式的解释）． 设(M,σ)为一个 $\mathcal{L}$-模型，A为公式，**公式A的解释$A_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $(P(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \notin P_M. \end{cases}$

(2) $(t_1 \doteq t_2))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$

(3) $(\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]})$.

(4) $(A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{*}(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$.

(5) $(\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对}\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$

(6) $(\exists x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{若}\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$

公式的解释

定义3.15（公式的解释）. 设(M,σ)为一个 $\mathcal{L}$-模型，A为公式，**公式A的解释$A_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $(P(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \notin P_M. \end{cases}$

(2) $(t_1 \doteq t_2))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$

(3) $(\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]})$.

(4) $(A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{*}(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$.

(5) $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 对\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & 否则. \end{cases}$

(6) $(\exists x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 若\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & 否则. \end{cases}$

变元x的赋值为a，
其它变元的赋值不变。

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\forall x_3.(x_3 < x_1 + x_4)$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\forall x_3.(x_3 < x_1 + x_4)$

$$=\begin{cases} T, & 对\forall a \in N, (<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\forall x_3.(x_3<x_1+x_4)$

$$=\begin{cases}T, & 对\forall a\in N, (<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=T;\\ F, & 否则.\end{cases}$$

其中 $(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$=\begin{cases}T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]},(+(x_1,x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]}\rangle \in <_N;\\ F, & 否则.\end{cases}$$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\forall x_3.(x_3<x_1+x_4)$

$$=\begin{cases} T, & 对\forall a\in N, (<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

其中 $(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$=\begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+(x_1,x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]}\rangle \in <_N; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

$(x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}=(\sigma[x_3:=a])(x_3)=a$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$$\forall x_3.(x_3<x_1+x_4)$$

$$=\begin{cases} T, & 对\forall a\in N,(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

其中 $(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$=\begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]},(+(x_1,x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]}\rangle \in <_N; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

$$(x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}=(\sigma[x_3:=a])(x_3)=a$$

$$(+(x_1,x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=(\sigma[x_3:=a])(x_1)+(\sigma[x_3:=a])(x_4)$$
$$=1+4=5$$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\forall x_3.(x_3<x_1+x_4)$

$$=\begin{cases} T, & 对\forall a\in N, (<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

其中 $(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=\begin{cases} T, & a<5; \\ F, & 否则. \end{cases}$

公式的解释

引理3.16. 对任何公式A，$A_{M[\sigma]} \in \mathbf{B} = \{T, F\}$。

对公式A的结构作归纳。

一个等价的语义定义

定义3.15. 设(M,σ)为$\mathcal{L}$-模型，A为公式，$M\vDash_\sigma A$定义如下：

- $M\vDash_\sigma t_1 \doteq t_2$ iff $(t_1)_{M[\sigma]} \doteq (t_2)_{M[\sigma]}$；
- $M\vDash_\sigma P(t_1,\ldots,t_n)$ iff $\langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \in P_M$；
- $M\vDash_\sigma \neg A$ iff not $M\vDash_\sigma A$；
- $M\vDash_\sigma A \wedge B$ iff $M\vDash_\sigma A$ 且 $M\vDash_\sigma B$;
- $M\vDash_\sigma A \vee B$ iff $M\vDash_\sigma A$ 或 $M\vDash_\sigma B$;
- $M\vDash_\sigma A \to B$ iff $M\vDash_\sigma A$ 蕴含 $M\vDash_\sigma B$;
- $M\vDash_\sigma \forall x. A$ iff 对任意$a \in M$，$M\vDash_{\sigma[x:=a]} A$；
- $M\vDash_\sigma \exists x. A$ iff 对某个$a \in M$，$M\vDash_{\sigma[x:=a]} A$。

可满足

定义3.17. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

$M \nvDash_\sigma A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M,σ) 可满足，记为 $M \vDash_\sigma A$，指 $A_{M[\sigma]} = T$；

(2) A 可满足指存在 (M,σ) 使得 $M \vDash_\sigma A$；

(3) $M \vDash A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \vDash_\sigma A$；

可满足

定义3.17. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

$M \nvDash_\sigma A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M \vDash_\sigma A$，指 $A_{M[\sigma]} = T$；

(2) A **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M \vDash_\sigma A$；

$M \nvDash A$ 指 $\exists\sigma$，$A_{M[\sigma]} = F$

(3) $M \vDash A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \vDash_\sigma A$；

(4) Γ 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M \vDash_\sigma \Gamma$ 指对 $\forall A \in \Gamma$，$M \vDash_\sigma A$；

(5) Γ **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M \vDash_\sigma \Gamma$；

(6) $M \vDash \Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \vDash_\sigma \Gamma$。

可满足

定义3.17. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

$M \nvDash_{\sigma} A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M \vDash_{\sigma} A$，指 $A_{M[\sigma]} = T$；

(2) A **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M \vDash_{\sigma} A$；

$M \nvDash A$ 指 $\exists\sigma$，$A_{M[\sigma]} = F$

(3) $M \vDash A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \vDash_{\sigma} A$；

(4) Γ 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M \vDash_{\sigma} \Gamma$ 指对 $\forall A \in \Gamma$，$M \vDash_{\sigma} A$；

(5) Γ **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M \vDash_{\sigma} \Gamma$；

(6) $M \vDash \Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \vDash_{\sigma} \Gamma$。

$M \nvDash_{\sigma} \Gamma$ 指 $\exists A \in \Gamma$，$A_{M[\sigma]} = F$

$M \nvDash \Gamma$ 指 $\exists\sigma$，$M \nvDash_{\sigma} \Gamma$

永真

定义3.18. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

(1) A**永真**，记为$\vDash A$，指对于任何模型 (M,σ) 有 $M\vDash_{\sigma}A$；

(2) Γ**永真**，记为$\vDash \Gamma$，指对于任何模型 (M,σ) 有 $M\vDash_{\sigma}\Gamma$。

语义结论

定义3.19. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M, σ) 为$\mathcal{L}$-模型。A为Γ的**语义结论**，记为$\Gamma \vDash A$，指对于任何模型 (M, σ)，若$M \vDash_\sigma \Gamma$，则 $M \vDash_\sigma A$。

- $\Gamma \nvDash A$ 表示 $\Gamma \vDash A$ 不成立
  - 即存在模型 (M, σ)，使得 $M \vDash_\sigma \Gamma$，$M \nvDash_\sigma A$
- $\emptyset \vDash A$ iff A永真，即$\vDash A$

形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

1. $\vDash A \vee \neg A$ 排中律
2. $\vDash \neg(A \wedge \neg A)$ 矛盾律
3. $\vDash (\forall x.(x \doteq x))$ 同一律

形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

1. $\vDash A \vee \neg A$ 排中律

反证法。

假设存在模型(M, σ)，使得$(A \vee \neg A)_{M[\sigma]} = F$。

形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

1. $\vDash A \vee \neg A$ 排中律

$(\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]})$.
$(A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{*}(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$.

反证法。

假设存在模型(M, σ)，使得$(A \vee \neg A)_{M[\sigma]} = F$。

$$(A \vee \neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\vee}(A_{M[\sigma]}, (\neg A)_{M[\sigma]})$$
$$= \mathbf{B}_{\vee}(A_{M[\sigma]}, \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]})) = F$$

$A_{M[\sigma]} = F$且$\mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]}) = F$，即$A_{M[\sigma]} = F$且$A_{M[\sigma]} = T$，矛盾。

形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

3. $\models (\forall x. (x \doteq x))$　　同一律

反证法。

假设存在模型(M, σ)，使得$(\forall x. (x \doteq x))_{M[\sigma]} = F$。

形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

3. $\vDash (\forall x. (x \doteq x))$　　同一律

$$(\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对}\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$$

反证法。

假设存在模型(M, σ)，使得$(\forall x. (x \doteq x))_{M[\sigma]} = F$。

对于$\forall a \in M$，

$$(x \doteq x)_{M[\sigma[x:=a]]} = \begin{cases} T, & (x)_{M[\sigma[x:=a]]} = (x)_{M[\sigma[x:=a]]}; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$$

所以$(\forall x. (x \doteq x))_{M[\sigma]} = T$，矛盾。

形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

1. $\vDash A \vee \neg A$ 排中律

2. $\vDash \neg(A \wedge \neg A)$ 矛盾律

3. $\vDash (\forall x.(x \doteq x))$ 同一律

引理3.20. 若 $\Gamma \vDash A$，则 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 不可满足。

反证法。假设$\Gamma \cup \{\neg A\}$可满足。

那么存在某个模型(M, σ)，$M \vDash_\sigma \Gamma$且$M \vDash_\sigma \neg A$。与 $\Gamma \vDash A$ 矛盾。

例，证明$\forall x.(A\to B)\vDash \forall x.A\to\forall x.B$。

假设$\forall x.(A\to B)\nvDash \forall x.A\to\forall x.B$，

即存在模型(M,σ)，使得

$$(\forall x.(A\to B))_{M[\sigma]}=T, \tag{1}$$

$$(\forall x.A\to\forall x.B)_{M[\sigma]}=F。\tag{2}$$

例，证明$\forall x.(A \to B) \vDash \forall x.A \to \forall x.B$。

假设$\forall x.(A \to B) \nvDash \forall x.A \to \forall x.B$，

即存在模型(M,σ)，使得

$$(\forall x.(A \to B))_{M[\sigma]} = T, \tag{1}$$

$$(\forall x.A \to \forall x.B)_{M[\sigma]} = F。 \tag{2}$$

由(2)得$(\forall x.A)_{M[\sigma]} = T$且$(\forall x.B)_{M[\sigma]} = F$。

例，证明$\forall x.(A \to B) \vDash \forall x.A \to \forall x.B$。

假设$\forall x.(A \to B) \nvDash \forall x.A \to \forall x.B$，

即存在模型(M,σ)，使得

$$(\forall x.(A \to B))_{M[\sigma]} = T, \tag{1}$$

$$(\forall x.A \to \forall x.B)_{M[\sigma]} = F。 \tag{2}$$

由(2)得$(\forall x.A)_{M[\sigma]} = T$且$(\forall x.B)_{M[\sigma]} = F$。

$$(\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对}\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

例，证明$\forall x.(A \to B) \vDash \forall x.A \to \forall x.B$。

假设$\forall x.(A \to B) \nvDash \forall x.A \to \forall x.B$，

即存在模型(M,σ)，使得

$$(\forall x.(A \to B))_{M[\sigma]} = T, \tag{1}$$

$$(\forall x.A \to \forall x.B)_{M[\sigma]} = F。\tag{2}$$

由(2)得$(\forall x.A)_{M[\sigma]} = T$且$(\forall x.B)_{M[\sigma]} = F$。

即对$\forall a \in M$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$，$\exists b \in M$，$B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$。

$$(\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 对\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

例，证明$\forall x.(A \to B) \vDash \forall x.A \to \forall x.B$。

假设$\forall x.(A \to B) \nvDash \forall x.A \to \forall x.B$，

即存在模型(M,σ)，使得

$$(\forall x.(A \to B))_{M[\sigma]} = T, \tag{1}$$

$$(\forall x.A \to \forall x.B)_{M[\sigma]} = F。 \tag{2}$$

由(2)得$(\forall x.A)_{M[\sigma]} = T$且$(\forall x.B)_{M[\sigma]} = F$。

即对$\forall a \in M$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$，$\exists b \in M$，$B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$。

所以$\exists b \in M$，$A_{M[\sigma[x:=b]]} = T$且$B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$。

$$(\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 对\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

例，证明$\forall x.(A \to B) \vDash \forall x.A \to \forall x.B$。

假设$\forall x.(A \to B) \nvDash \forall x.A \to \forall x.B$，

即存在模型(M,σ)，使得

$$(\forall x.(A \to B))_{M[\sigma]} = T, \tag{1}$$

$$(\forall x.A \to \forall x.B)_{M[\sigma]} = F。 \tag{2}$$

由(2)得$(\forall x.A)_{M[\sigma]} = T$且$(\forall x.B)_{M[\sigma]} = F$。

即对$\forall a \in M$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$，$\exists b \in M$，$B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$。

所以$\exists b \in M$，$A_{M[\sigma[x:=b]]} = T$且$B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$。

也即$\exists b \in M$，$(A \to B)_{M[\sigma[x:=b]]} = F$，与(1)矛盾。

$$\boxed{(\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对}\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}}$$

小结

- 一阶逻辑的语义
  - 结构 (M, I)
  - 模型 (M, σ)
  - 项的解释
  - 公式的解释
  - 可满足
  - 语义结论