# 一阶逻辑（一）

# 例子

- 所有的牛都有角（前提）
  有些动物是牛（前提）
  因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确

# 例子

- 所有的牛都有角（前提）
  有些动物是牛（前提）
  因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确
- 量词
  - 超出命题逻辑语言的表达能力
  - p为“所有的牛都有角”，q为“有些动物是牛”，r为“所有动物有角”
  - $(p \wedge q) \rightarrow r$，无法判断推理的正确性
- 谓词
  - “xx有角”，“xx是牛”

- *The only way to rectify our reasoning is to make them as tangible as those of the Mathematicians, so that we can find our error at a glance, and when there are disputes among persons, we can simply say: Let us calculate , without further ado, to see who is right.*

-- G. W. Leibniz, The Art of Discovery(1685)

Gottfried Wilhelm Leibniz

（1646-1716）

- 通用语言&通用数学
- 命题逻辑语言+自然推理系统*G'*
  - 可以机械地完成推理和验证
  - 但不够通用

# 一阶逻辑语言的字母表

**定义3.1.** 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 $V$：可数无穷集 $V = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$

联结词：$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

量词：$\forall \quad \exists$

等词：$\doteq$

辅助符：( ) . ,

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

# 一阶逻辑语言的字母表

**定义3.1.** 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 $V$：可数无穷集 $V = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$

联结词：$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

量词：$\forall \quad \exists$

等词：$\doteq$

辅助符：( ) . ,

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

1. 与命题符不同
2. $|V| = |N|$

# 一阶逻辑语言的字母表

**定义3.1.** 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 $V$：可数无穷集 $V = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$

联结词：$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

1. 与命题符不同
2. $|V| = |N|$

量词：$\forall \quad \exists$

完全子集$\{\neg, \rightarrow\}$

等词：$\doteq$

辅助符：( ) . ,

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

# 一阶逻辑语言的字母表

**定义3.1.** 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 $V$：可数无穷集 $V = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$

联结词：$\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$

1. 与命题符不同

2. $|V| = |N|$

量词：$\forall$ $\exists$

完全子集$\{\neg, \rightarrow\}$

等词：$\doteq$

与联结词$\leftrightarrow$不同

辅助符：( ) . ,

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

# 一阶逻辑语言的字母表

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

(a) $\mathcal{L}_c$ 由可数（包括0个）**常元符**组成，$\mathcal{L}_c = \{c_0, c_1, \ldots\}$。

(b) $\mathcal{L}_f$（函数集）由可数**函数符**组成，$\mathcal{L}_f = \{f_0, f_1, \ldots\}$，对每个函数符$f$，赋予一个正整数$\mu(f)$，为$f$的元数。

(c) $\mathcal{L}_P$（谓词集）由可数**谓词符**组成，$\mathcal{L}_P = \{P_0, P_1, \ldots\}$，对每个谓词符$P$，赋予一个非负整数$\mu(P)$，为$P$的元数。

# 一阶逻辑语言的字母表

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

(a) $\mathcal{L}_c$ 由可数（包括0个）**常元符**组成，$\mathcal{L}_c=\{c_0,c_1,...\}$。

(b) $\mathcal{L}_f$（函数集）由可数**函数符**组成，$\mathcal{L}_f=\{f_0,f_1,...\}$，对每个函数符$f$，赋予一个正整数$\mu(f)$，为$f$的元数。

(c) $\mathcal{L}_P$（谓词集）由可数**谓词符**组成，$\mathcal{L}_P=\{P_0,P_1,...\}$，对每个谓词符$P$，赋予一个非负整数$\mu(P)$，为$P$的元数。

1. 谓词也称关系符号
2. 等词≐是一个特别的谓词
3. $\mu(P)=0$时，称$P$为命题符
4. $\mathcal{L}_f$和$\mathcal{L}_P$可以为空集

# 字母表的一些说明

(1) 变元集与自然数集等势，为可数无穷集。

(2) 联结词集在有些书籍中为$\{\neg, \rightarrow\}$，$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$。

(3) 等词$\doteq$是一个特别的谓词，用$\mathcal{L}_e$表示带$\doteq$的一阶语言。

(4) 函数与谓词皆有元数，对于谓词$P$，当$\mu(P) = 0$时，称$P$为命题符。

(5) 每个一阶语言的逻辑符集皆相同，不同的是一阶语言的非逻辑符号集合（含$\doteq$的一阶语言中的$\doteq$都相同）。

(6) 记 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{L}_c \cup \mathcal{L}_f \cup \mathcal{L}_P$。

# 字母表的一些说明

例，初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集为 $\{0\}$；

函数符集为 $\{S, + , \cdot\}$；

谓词符集为 $\{<\}$。

# 字母表的一些说明

例，初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集为 $\{0\}$；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$；

谓词符集为 $\{<\}$。

$S$为后继函数（一元）
$S(n) = n + 1$（语义层面）

$\mathcal{A}$的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists \forall S(+(x_0, x_1))$$

# 字母表的一些说明

例，初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集为 $\{0\}$；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$；

谓词符集为 $\{<\}$。

$S$为后继函数（一元）
$S(n) = n + 1$（语义层面）

$\mathcal{A}$的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists \forall S(+(x_0, x_1))$$

$\cdot (x, 0) \doteq 0$
$x \cdot 0 \doteq 0$

# 字母表的一些说明

例，初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集为 $\{0\}$；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$；

谓词符集为 $\{<\}$。

$S$为后继函数（一元）
$S(n) = n + 1$（语义层面）

$\mathcal{A}$的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists\forall S(+(x_0, x_1))$$

$\cdot (x, 0) \doteq 0$
$x \cdot 0 \doteq 0$

表达式不一定是公式

# 字母表的一些说明

例，群论语言$\mathfrak{G}$：

常元符集为 $\{e\}$；

函数符集为 $\{\cdot$ （二元），$^{-1}$（一元）$\}$。

$\mathfrak{G}$的表达式：

$$\forall x. (\cdot (x, e) \doteq x \wedge \cdot (e, x) \doteq x)$$

# 项（term）

**定义3.2（项）．** 项是指由以下的(i)~(iii)（有限次使用）生成。

(i) 每个变元符为项；

(ii) 每个常元符为项；

(iii) 若$f$为n元函数，$t_1,...,t_n$为项，则$f(t_1,...,t_n)$为项。

归纳定义

# 项（term）

**定义3.2（项）．** 全体项的集合 $T$ 为满足以下条件的最小集合：

(i) $V \subseteq T$；

(ii) $\mathcal{L}_c \subseteq T$；

(iii) 若$f$为n元函数，$t_1, \ldots, t_n \in T$，则$f(t_1, \ldots, t_n) \in T$。

闭包定义

# 项（term）

**定义3.2（项）．** 用Bacus-Naur Form定义项为

$$t ::= x | c | f(t_1, \ldots, t_n)$$

变元　常元　函数

# 公式（formula）

**定义3.3（公式）．** 原子公式由以下(i)(ii)（有限次使用）生成。

(i) 若 $s$ 和 $t$ 为项，则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。

(ii) 若$R$为n元谓词符，且$t_1, ..., t_n$为项，则$R(t_1, ..., t_n)$为原子公式。

公式由以下(i)~(iv)（有限次使用）生成。

(i) 原子公式为公式；

(ii) 若$A$为公式，则$(\neg A)$为公式；

(iii) 若$A, B$为公式，则$(A * B)$为公式，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(iv) 若$A, B$为公式且$x$为变元，则$\forall x. A$和$\exists x. B$为公式。

# 公式（formula）

**定义3.3（公式）．** 原子公式由以下(i)(ii)（有限次使用）生成。

(i) 若 $s$ 和 $t$ 为项，则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。

(ii) 若$R$为n元谓词符，且$t_1, \ldots, t_n$为项，则$R(t_1, \ldots, t_n)$为原子公式。

公式由以下(i)~(iv)（有限次使用）生成。

(i) 原子公式为公式；

(ii) 若$A$为公式，则$(\neg A)$为公式；

(iii) 若$A, B$为公式，则$(A * B)$为公式，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(iv) 若$A, B$为公式且$x$为变元，则$\forall x.A$和$\exists x.B$为公式。

若f和g为函数符，

$\neg f(x)$ ✘

$f(x) \wedge g(x, y)$ ✘

# 公式（formula）

**定义3.3（公式）．** 原子公式由以下(i)(ii)（有限次使用）生成。

(i) 若 $s$ 和 $t$ 为项，则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。

(ii) 若$R$为n元谓词符，且$t_1, ..., t_n$为项，则$R(t_1, ..., t_n)$为原子公式。

公式由以下(i)~(iv)（有限次使用）生成。

(i) 原子公式为公式；

(ii) 若$A$为公式，则$(\neg A)$为公式；

(iii) 若$A, B$为公式，则$(A * B)$为公式，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(iv) 若$A, B$为公式且$x$为变元，则$\forall x. A$和$\exists x. B$为公式。

1. 等词和谓词作用在项上。
2. 联结词和量词只能作用在公式上。

# 公式（formula）

**定义3.3（公式）．** 公式由以下(i)~(v)（有限次使用）生成。

(i) 若 $s$ 和 $t$ 为项，则 $(s \doteq t)$ 为公式。

(ii) 若$R$为n元谓词符，且$t_1, \ldots, t_n$为项，则$R(t_1, \ldots, t_n)$为公式。

(iii) 若$A$为公式，则$(\neg A)$为公式；

(iv) 若$A, B$为公式，则$(A * B)$为公式，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(v) 若$A, B$为公式且$x$为变元，则$\forall x. A$和$\exists x. B$为公式。

# 公式（formula）

**定义3.3（公式）．** 全体公式的集合$F$为满足以下条件的最小集合。

(i) 若 $s, t \in T$，则 $(s \doteq t) \in F$。

(ii) 若$R$为n元谓词符，且$t_1, ..., t_n \in T$，则$R(t_1, ..., t_n) \in F$；

(iii) 若$A, B \in F$，则 $(\neg A) \in F$；

(iv) 若$A, B \in F$，$(A * B) \in F$，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(v) 若 $A \in F$且 $x \in V$，则 $(Qx, A) \in F$，其中$Q \in \{\forall, \exists\}$。

# 公式（formula）

**定义3.3（公式）．** 用Bacus-Naur Form定义公式为

$$A ::= (t_1 \doteq t_2) | R(t_1, \ldots, t_n) | (\neg A) | (A \wedge B) | (A \vee B) | (A \rightarrow B) | (\forall x. A) | (\exists x. A)$$

例，群论语言$\mathfrak{G}$：

常元符集为 $\{e\}$；

函数符集为 $\{\cdot$ （二元），$^{-1}$（一元）$\}$。

$\mathfrak{G}$的表达式：

$$\forall x.(\cdot(x,e) \doteq x \wedge \cdot(e,x) \doteq x)$$

$$(\forall x.((\cdot(x,e) \doteq x) \wedge (\cdot(e,x) \doteq x)))$$

公式✔

例，群论语言$\mathfrak{G}$：

常元符集为 $\{e\}$；

函数符集为 $\{\cdot$ （二元），$^{-1}$（一元）$\}$。

$$(\forall x.((\cdot(x,e) \doteq x) \land (\cdot(e,x) \doteq x)))$$

为阅读方便，用m和i分别表示函数·和 $^{-1}$。

$$(\forall x.((m(x,e) \doteq x) \land (m(e,x) \doteq x)))$$

$$(\forall x.((m(x,e) \doteq x) \land (m(e,x) \doteq x)))$$

$$((m(x,e) \doteq x) \land (m(e,x) \doteq x))$$

$$(m(x,e) \doteq x) \qquad (m(e,x) \doteq x)$$

$$m(x,e) \qquad x \qquad m(e,x) \qquad x$$

由下向上生成。

# 例子

- 所有的牛都有角（前提）
  有些动物是牛（前提）
  因此，所有动物有角（结论）

- 对于所有x，如果x是牛，则x有角，
  并且存在y，y是动物，且y是牛，
  则对于所有z，如果z是动物，则z有角。

- 谓词：$P(x)$表示x是牛，$Q(x)$表示x有角，$R(x)$表示x是动物。
  $((\forall x.(P(x) \to Q(x))) \land (\exists y.(R(y) \land P(y))) \to (\forall z.(R(z) \to Q(z))))$

# 对项的结构作归纳

**<u>如何证明所有项都具有某个性质R?</u>**

归纳基础：证明对于所有单个变元符合常元符，具有性质R。

归纳假设：对于项$t_1, ..., t_n$，都有性质R。

归纳步骤：利用归纳假设证明，使用函数符号生成的项

$f(t_1, ..., t_n)$保留性质R。

# 对公式的结构作归纳

**<u>如何证明所有公式都具有某个性质R?</u>**

归纳基础：对项的结构做归纳，证明所有项都有性质R。

归纳假设：对于公式A和B，都有性质R。

归纳步骤：

分情况讨论$(s \doteq t)$，$R(t_1, \ldots, t_n)$，$(\neg A)$，$(A * B)$，$\forall x. A$，$\exists x. B$，利用归纳基础和归纳假设证明，上述情形生成的公式保留性质R。

# 一阶逻辑公式

（括号引理）一阶逻辑公式的左括号和右括号的个数相等。

- 对公式的结构作归纳

与命题逻辑公式的简写类似，也可以简写一阶逻辑公式。

- 省略最外层的括号
- 省略$(Qx, A)$的左右括号
- 辅助符号引入方括号、大括号
- 约定逻辑符的优先级
  - $\doteq \quad \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

$$(\forall x.((m(x,e) \doteq x) \wedge (m(e,x) \doteq x)))$$

可简写成

$$\forall x.(m(x,e) \doteq x \wedge m(e,x) \doteq x).$$

$$((\forall x.(P(x) \to Q(x))) \wedge (\exists y.(R(y) \wedge P(y))) \to (\forall z.(R(z) \to Q(z))))$$

可简写成

$$(\forall x.P(x) \to Q(x) \wedge \exists y.R(y) \wedge P(y)) \to \forall z.(R(z) \to Q(z)).$$

# 自由变元

**定义3.4（项的自由变元）**．设 $t$ 为项，对 $t$ 的结构归纳定义 $FV(t)$ 如下：

(1) $FV(x)=\{x\}$，其中 $x\in V$；

(2) $FV(c)=\emptyset$，其中 $c\in\mathcal{L}_c$；

(3) $FV(f(t_1,t_2,\ldots,t_n))=\bigcup_{i=1}^{n}FV(t_i)$，其中f为n元函数。

$x$ 为 $t$ 的自由变元指 $x\in FV(t)$，$t$ 为闭项指 $FV(t)=\emptyset$。

例，$t=m(x,e)$，$FV(t)=FV(x)\cup FV(e)=\{x\}$

# 自由变元

**定义3.5（公式的自由变元）.** 设 $A$ 为公式，对 $A$ 的结构归纳定义$FV(A)$ 如下：

(1) $FV(t_1 \doteq t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$；

(2) $FV(P(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$，其中P为n元谓词；

(3) $FV(\neg A) = FV(A)$；

(4) $FV(A * B) = FV(A) \cup FV(B)$，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(5) $FV(Qx.A) = FV(A) - \{x\}$，其中$Q \in \{\forall, \exists\}$。

$x$ 为 $A$ 的自由变元指 $x \in FV(A)$，$A$ 的句子指 $FV(A) = \emptyset$。

# 自由变元

例，设公式A为

$$\exists x.((P(x,\ y\ ) \land \forall\ y\ .R(x,\ y\ )) \to Q(x,z))$$

y第1次出现　　y第2次出现　　y第3次出现

自由　　约束　　约束

称在 $A$ 中 $x$ 的第 $i$ 次出现是**约束**的指存在 $A$ 的子公式 $Qx.B$ 使 $A$ 中 $x$ 的第 $i$ 次出现在 $Qx.B$ 中。

一个变元可以既有自由出现，也有约束出现。

# 项的替换

**定义3.6（项的替换）**．设 $s$ 和 $t$ 为项，$x$ 为变元，对 $s$ 的结构作归纳定义 $s\left[\frac{t}{x}\right]$ 如下：

(1) $x\left[\frac{t}{x}\right] = t$；

(2) $y\left[\frac{t}{x}\right] = y$，这里 $y$ 为异于 $x$ 的变元；

(3) $c\left[\frac{t}{x}\right] = c$，这里 $c$ 为常元；

(4) $f(t_1, \ldots, t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = f(t_1\left[\frac{t}{x}\right], \ldots, t_n\left[\frac{t}{x}\right])$。

# 项的替换

例，设项 $s = f(f(x,y),0)$，

$$s\left[\frac{t}{x}\right] = f(f(x,y),0)\left[\frac{t}{x}\right]$$

(1) $x\left[\frac{t}{x}\right] = t$；

(2) $y\left[\frac{t}{x}\right] = y$，这里 $y$ 为异于 $x$ 的变元；

(3) $c\left[\frac{t}{x}\right] = c$，这里 $c$ 为常元；

(4) $f(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = f(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right])$。

# 项的替换

例，设项 $s = f(f(x, y), 0)$，

$$s\left[\frac{t}{x}\right] = f(f(x, y), 0)\left[\frac{t}{x}\right]$$

$$= f\left(f(x, y)\left[\frac{t}{x}\right], 0\left[\frac{t}{x}\right]\right)$$

(1) $x\left[\frac{t}{x}\right] = t$；

(2) $y\left[\frac{t}{x}\right] = y$，这里 $y$ 为异于 $x$ 的变元；

(3) $c\left[\frac{t}{x}\right] = c$，这里 $c$ 为常元；

(4) $f(t_1, \ldots, t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = f\left(t_1\left[\frac{t}{x}\right], \ldots, t_n\left[\frac{t}{x}\right]\right)$。

# 项的替换

例，设项 $s=f(f(x,y),0)$，

$$s\left[\frac{t}{x}\right]=f(f(x,y),0)\left[\frac{t}{x}\right]$$

$$=f(f(x,y)\left[\frac{t}{x}\right],0\left[\frac{t}{x}\right])$$

$$=f(f(x\left[\frac{t}{x}\right],y\left[\frac{t}{x}\right]),0)$$

$$=f(f(t,y),0)$$

(1) $x\left[\frac{t}{x}\right]=t$；

(2) $y\left[\frac{t}{x}\right]=y$，这里 $y$ 为异于 $x$ 的变元；

(3) $c\left[\frac{t}{x}\right]=c$，这里 $c$ 为常元；

(4) $f(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right]=f(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right])$。

# 公式的替换

**定义3.7（公式的替换）**．设 $A$ 为公式，$t$ 为项，$x$ 为变元，

对 $A$ 的结构作归纳定义 $A\left[\frac{t}{x}\right]$ 如下：

(1) $(t_1 \doteq t_2)\left[\frac{t}{x}\right] = (t_1\left[\frac{t}{x}\right] \doteq t_2\left[\frac{t}{x}\right])$；

(2) $R(t_1, \ldots, t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = R(t_1\left[\frac{t}{x}\right], \ldots, t_n\left[\frac{t}{x}\right])$；

(3) $(\neg A)\left[\frac{t}{x}\right] = (\neg A\left[\frac{t}{x}\right])$；

(4) $(A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = (A\left[\frac{t}{x}\right] * B\left[\frac{t}{x}\right])$；

# 公式的替换

(5) $(Qx.A)\left[\frac{t}{x}\right]=(Qx.A)$；

(6) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right]=(Qy.A\left[\frac{t}{x}\right])$，若 y 为异于 x 的变元且$y\notin FV(t)$；

(7) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right]=(Qz.A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right])$，若 y 为异于 x 的变元且$y\in FV(t)$，这里 z 为满足 $z\notin FV(t)$ 且z不出现在A中的足标最小的变元。

例，设公式$A = \forall x.(P(x) \to Q(y))$，其中P, Q为谓词。

$$A\left[\frac{y}{x}\right] = (\forall x.(P(x) \to Q(y)))\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$= \forall x.(P(x) \to Q(y))$$

(5) $(Qx.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qx.A)$

例，设公式$A = P(x) \to \exists y.(Q(y) \wedge R(y,x))$，其中P, Q, R为谓词。

$$A\left[\frac{y}{x}\right] = (P(x) \to \exists y.(Q(y) \wedge R(y,x)))\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$= P(x)\left[\frac{y}{x}\right] \to (\exists y.(Q(y) \wedge R(y,x)))\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$(4)\ (A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = (A\left[\frac{t}{x}\right] * B\left[\frac{t}{x}\right])$$

例，设公式$A = P(x) \to \exists y.(Q(y) \wedge R(y,x))$，其中P, Q, R为谓词。

$$A\left[\frac{y}{x}\right] = (P(x) \to \exists y.(Q(y) \wedge R(y,x)))\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$= P(x)\left[\frac{y}{x}\right] \to (\exists y.(Q(y) \wedge R(y,x)))\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$= P(x\left[\frac{y}{x}\right]) \to \exists z.(Q(y) \wedge R(y,x))\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right]$$

(2) $R(t_1, \ldots, t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = R(t_1\left[\frac{t}{x}\right], \ldots, t_n\left[\frac{t}{x}\right])$

(7) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qz.A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right])$，若 y 为异于 x 的变元且$y \in FV(t)$

例，设公式$A = P(x) \to \exists y.(Q(y) \land R(y,x))$，其中P, Q, R为谓词。

$$A\left[\frac{y}{x}\right] = (P(x) \to \exists y.(Q(y) \land R(y,x)))\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$= P(x)\left[\frac{y}{x}\right] \to (\exists y.(Q(y) \land R(y,x)))\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$= P(x\left[\frac{y}{x}\right]) \to \exists z.(Q(y) \land R(y,x))\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$= P(y) \to \exists z.Q(y)\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right] \land R(y,x)\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$(4)\ (A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = (A\left[\frac{t}{x}\right] * B\left[\frac{t}{x}\right])$$

例，设公式$A = P(x) \to \exists y.(Q(y) \wedge R(y,x))$，其中P, Q, R为谓词。

$$
\begin{aligned}
A\left[\frac{y}{x}\right] &= (P(x) \to \exists y.(Q(y) \wedge R(y,x)))\left[\frac{y}{x}\right] \\
&= P(x)\left[\frac{y}{x}\right] \to (\exists y.(Q(y) \wedge R(y,x)))\left[\frac{y}{x}\right] \\
&= P(x\left[\frac{y}{x}\right]) \to \exists z.(Q(y) \wedge R(y,x))\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right] \\
&= P(y) \to \exists z.Q(y)\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right] \wedge R(y,x)\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right] \\
&= P(y) \to \exists z.Q(y\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right]) \wedge R(y\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right], x\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{y}{x}\right]) \\
&= P(y) \to \exists z.Q(z\left[\frac{y}{x}\right]) \wedge R(z\left[\frac{y}{x}\right], x\left[\frac{y}{x}\right]) \\
&= P(y) \to \exists z.Q(z) \wedge R(z,y)
\end{aligned}
$$

# 公式的替换

注：

(1) 改名把 $\forall x. A$ 改为 $\forall y. A\left[\frac{y}{x}\right]$，这里 $y$ 不在A中出现；

(2) 先改名后替代；

(3) 替代不改变约束关系；

(4) 盲目替代会出错；

(5) 定义3.7中(7)的z为新变元。

(7) 当$y \in FV(t)$时，

$$(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qz.A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right])。$$

y改名成z，z不是t中自由变元且不在A中出现，再将x替换为t。

# 公式的结构

**定理3.8.** 一阶逻辑的项恰好具有以下三种形式之一：变元符，常元符，或$f(t_1,...,t_n)$，其中f为n元函数符。并且项所具有的那种形式是唯一的。

对项的结构做归纳，与命题逻辑公式的结构的讨论类似。

# 公式的结构

**定理3.9.** 一阶逻辑公式恰好具有以下八种形式之一：$(s \doteq t)$，$R(t_1, \ldots, t_n)$，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(\forall x. A)$，$(\exists x. A)$，其中R为n元谓词符，s和t为项，A和B为公式。并且一阶逻辑公式所具有的那种形式是唯一的。

对公式的结构做归纳，与命题逻辑公式的结构的讨论类似。

# 小结

- 一阶逻辑的语法
  - 符号表
  - 项、原子公式、公式的定义
  - 对项、公式的结构作归纳
  - 自由变元
  - 项、公式的替换
  - 一阶逻辑公式的结构