南京大学
Nanjing University

命题逻辑（三）

推理与证明

- 元语言层面
  - $\vDash$、$\simeq$、iff、与、或、非、蕴含等等
  - 如，$A \rightarrow B \vDash \neg A \vee B$

- 命题语言层面
  - 定义推理与证明
  - 机械地完成命题逻辑推理
  - 机械地证明命题
  - 机械地检验证明的正确性

自然推理系统

定义1.41. $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$ 表示任何命题有穷集合（可为空），一个**矢列**（sequent）是一个二元组 (Γ, Δ)，记为 $\Gamma \vdash \Delta$，称 Γ 为**前件**，Δ 为**后件**。**命题逻辑的自然推理系统** G' 由以下公理和规则组成，A, B 表示任何命题。

- 公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
- 规则：

Γ, A, Δ 为集合 $\Gamma \cup \{A\} \cup \Delta$ 的简写

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

例子

- 假设要邀请A、B、C、D等人参加聚会
- 令命题a为“邀请A”，命题b为“邀请B”……
- a, b$\vdash c, d$

如果邀请A且邀请B，则邀请C或邀请D

例子

- 假设要邀请A、B、C、D等人参加聚会
- 令命题a为“邀请A”，命题b为“邀请B”……
- a, b$\vdash c, d$

如果邀请A且邀请B，则邀请C或邀请D

- 公理：a, b$\vdash a, c, d$

如果邀请A和B，则邀请A或C或D

例子

- 假设要邀请A、B、C、D等人参加聚会
- 令命题a为“邀请A”，命题b为“邀请B”……

- a, b$\vdash c, d$

如果邀请A且邀请B，则邀请C或邀请D

- 公理：a, b$\vdash a, c, d$

如果邀请A和B，则邀请A或C或D

- $\neg L: \dfrac{a,b \vdash c,d}{a,b,\neg c \vdash d}$

$$\frac{\text{如果邀请}A\text{且邀请}B\text{，则邀请}C\text{或邀请}D}{\text{如果邀请}A\text{，邀请}B\text{，且不邀请C，则邀请}D}$$

自然推理系统

定义1.41. $\Gamma,\Delta,\Lambda,\Theta$ 表示任何命题有穷集合（可为空），一个**矢列**（sequent）是一个二元组 (Γ,Δ)，记为 $\Gamma\vdash\Delta$，称 Γ 为**前件**，Δ 为**后件**。**命题逻辑的自然推理系统** G' 由以下公理和规则组成，A,B 表示任何命题。

- 公理：$\Gamma,A,\Delta\vdash\Lambda,A,\Theta$
- 规则：

Γ,A,Δ 为集合 $\Gamma\cup\{A\}\cup\Delta$ 的简写

$$\neg L:\frac{\Gamma,\Delta\vdash\Lambda,A}{\Gamma,\neg A,\Delta\vdash\Lambda}\qquad\qquad \neg R:\frac{\Gamma,A\vdash\Lambda,\Theta}{\Gamma\vdash\Lambda,\neg A,\Theta}$$

$$\neg L:\frac{\Gamma\cup\Delta\vdash\Lambda\cup\{A\}}{\Gamma\cup\{\neg A\}\cup\Delta\vdash\Lambda}$$

自然推理系统

定义1.41. $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$ 表示任何命题有穷集合（可为空），一个**矢列**（sequent）是一个二元组 (Γ, Δ)，记为 $\Gamma \vdash \Delta$，称 Γ 为**前件**，Δ 为**后件**。**命题逻辑的自然推理系统** G' 由以下公理和规则组成，A, B 表示任何命题。

- 公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
- 规则：

Γ, A, Δ 为集合 $\Gamma \cup \{A\} \cup \Delta$ 的简写

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\neg L: \frac{\Gamma \cup \Delta \vdash \Lambda \cup \{A\}}{\Gamma \cup \{\neg A\} \cup \Delta \vdash \Lambda}$$

上矢列，前提

下矢列，结论

自然推理系统

定义1.41. $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$ 表示任何命题有穷集合（可为空），一个**矢列**（sequent）是一个二元组 (Γ, Δ)，记为 $\Gamma \vdash \Delta$，称 Γ 为**前件**，Δ 为**后件**。**命题逻辑的自然推理系统** G' 由以下公理和规则组成，A, B 表示任何命题。

- 公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
- 规则：

Γ, A, Δ 为集合 $\Gamma \cup \{A\} \cup \Delta$ 的简写

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\neg L: \frac{\Gamma \cup \Delta \vdash \Lambda \cup \{A\}}{\Gamma \cup \{\neg A\} \cup \Delta \vdash \Lambda}$$

A 称为主命题，Γ, Δ, Λ 中称为辅命题

自然推理系统

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \qquad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

$$\rightarrow L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \rightarrow R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \rightarrow B, \Theta}$$

$$\text{Cut}: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

自然推理系统

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \qquad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

$$\rightarrow L: \frac{a \vdash c, d \qquad a, b \vdash d}{a, c \rightarrow b \vdash d} \qquad \rightarrow R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \rightarrow B, \Theta}$$

$$\frac{\text{如果邀请}A\text{，则邀请}C\text{或}D \qquad \text{如果邀请A和B则邀请D}}{\text{如果邀请}A\text{，邀请C蕴含邀请B，则邀请}D}$$

公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

自然推理系统

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \qquad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

$$\to L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \ \ldots}{\Gamma, \ldots} \qquad \frac{\ldots \Lambda, B, \Theta}{\ldots A \to B, \Theta}$$

$$\text{Cut}: \frac{a \vdash e, c \qquad b, e \vdash d}{a, b \vdash c, d}$$

$$\text{Cut}: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

$$\frac{\text{如果邀请}A\text{，则邀请}C\text{或E} \qquad \text{如果邀请B和E则邀请D}}{\text{如果邀请}A\text{和B，则邀请}C\text{或}D}$$

自然推理系统

- 系统G’中只有一条公理，有多条规则，每条规则都有名称，呈形 $\frac{S'}{S}$ 或 $\frac{S_1 \quad S_2}{S}$，这可以被看作树

- 规则的上矢列被称为**前提**，下矢列被称为**结论**。
- G’系统中的规则被称为**推理规则**，规则中被作用的命题被称为**主命题**，而不变的命题被称为**辅命题**。

自然推理系统

每个公理和规则都是**模式**（schema），它们可有无穷多个**实例**。

例，$\dfrac{A,B\vdash P,D \quad Q,A,B\vdash D}{A,P\rightarrow Q,B\vdash D}$ 为 $\rightarrow L$ 的实例。

$$\rightarrow L\!: \frac{\Gamma,\Delta \vdash \Lambda, A \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \vdash \Lambda}$$

$\Gamma = \{A\}, \Delta = \{B\}, \Lambda = \{D\}$

也可以看成 $\Gamma = \{A, B\}, \Delta = \emptyset$

自然推理系统

每个公理和规则都是**模式**（schema），它们可有无穷多个**实例**。

例，$A, B \vdash A$ 为公理的实例。

公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

G'的一些基本概念

定义1.42. 设 $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$，$\Delta = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$，

1. $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例（falsifiable），指存在赋值 v，使得

$$v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n),$$

这里称 v **反驳** $\Gamma \vdash \Delta$。

2. $\Gamma \vdash \Delta$ **有效**（valid），指对任何赋值 v，有

$$v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_n),$$

这里称 v **满足** $\Gamma \vdash \Delta$。

3. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效也被记为 $\Gamma \vDash \Delta$。

G'的一些基本概念

定义1.42. 设 $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$，$\Delta = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$，

1. $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例（falsifiable），指存在赋值 v，使得

$$v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n),$$

这里称 v **反驳** $\Gamma \vdash \Delta$。

2. $\Gamma \vdash \Delta$ **有效**（valid），指对任何赋值 v，有

$$v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_n),$$

这里称 v **满足** $\Gamma \vdash \Delta$。

3. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效也被记为 $\Gamma \vDash \Delta$。

与语义结论定义比较：

$\Gamma \vDash A$ iff $\forall v, v \vDash \Gamma$ 蕴含 $v \vDash A$

$\Gamma \vDash \Delta$ iff $\forall v, v \vDash \Gamma$ 蕴含 $v \vDash \Delta$ ✘

$\Gamma \vDash \Delta$ iff $\forall v, v \vDash \Gamma$ 蕴含 $\exists A \in \Delta, v \vDash A$

G'的一些基本概念

定义1.42. 设 $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$，$\Delta = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$，

1. $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例（falsifiable），指存在赋值 v，使得

$$v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n),$$

这里称 v **反驳** $\Gamma \vdash \Delta$。

2. $\Gamma \vdash \Delta$ **有效**（valid），指对任何赋值 v，有

$$v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_n),$$

这里称 v **满足** $\Gamma \vdash \Delta$。

3. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效也被记为 $\Gamma \vDash \Delta$。

$\vdash$ 语法层面
$\vDash$ 语义层面

G'的一些基本概念

特例：

4. 当 $m=0$ 时，$\vdash B_1,\ldots,B_n$ 有反例指 $(\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n)$ 可满足；$\vdash B_1,\ldots,B_n$ 有效指 $(B_1 \vee \ldots \vee B_n)$ 永真。
5. 当 $n=0$ 时，$A_1,\ldots,A_m \vdash$ 有反例指 $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$ 可满足；$A_1,\ldots,A_m \vdash$ 有效指 $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$ 不可满足。
6. 约定 $\{\} \vdash \{\}$ 非有效。

有反例：$\exists v, s.t., v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n)$
有效：$\forall v, v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$

自然推理系统

- 若 $\Gamma \vdash \Lambda$ 有效，则 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 有效。

有效：$\forall v, v \vDash (A_1 \wedge ... \wedge A_m) \rightarrow (B_1 \vee ... \vee B_n)$

$$v \vDash (\bigwedge A_i \wedge C_i) \rightarrow (\bigvee B_i \vee D_i)$$

G'的一些性质

命题1.43. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效当且仅当 $\Gamma \vdash \Delta$ 无反例。

证明:

$\Gamma \vdash \Delta$有反例 iff $\exists v$使$v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n)$,

无反例 iff $\forall v, v \nvDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n)$,

$\hat{v}((A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n)) = 0$,

$\hat{v}((A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_n)) = 1$。

$\Gamma \vdash \Delta$有效 iff $\forall v$, $v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$。

$\square$

G’的一些性质

引理1.44. 对于G’系统的Cut规则以外的规则，

1. 赋值 v 反驳规则的结论当且仅当 v 至少反驳规则的<u>一个</u>前提；
2. 赋值 v 满足规则的结论当且仅当 v 满足规则的<u>所有</u>前提；
3. <u>每个</u>前提有效当且仅当结论有效。

G’的一些性质

引理1.44. 对于G’系统的Cut规则以外的规则，

1. 赋值 v 反驳规则的结论当且仅当 v 至少反驳规则的一个前提；

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda}$$

G’的一些性质

引理1.44. 对于G’系统的Cut规则以外的规则，

1. 赋值 v 反驳规则的结论当且仅当 v 至少反驳规则的<u>一个</u>前提；

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda}$$

v 反驳 $\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda$

iff $v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \delta_j \wedge (A \vee B) \bigwedge \neg \lambda_k$，

G'的一些性质

引理1.44. 对于G'系统的Cut规则以外的规则，

1. 赋值 v 反驳规则的结论当且仅当 v 至少反驳规则的<u>一个</u>前提；

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda}$$

v 反驳 $\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda$

iff $v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \delta_j \wedge (A \vee B) \bigwedge \neg\lambda_k$，

iff $v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \delta_j \wedge A \bigwedge \neg\lambda_k$ 或 $v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \delta_j \wedge B \bigwedge \neg\lambda_k$，

iff v 反驳 $\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda$ 或 $\Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda$。

G'的一些性质

引理1.44. 对于G'系统的Cut规则以外的规则，

2. 赋值 v 满足规则的结论当且仅当 v 满足规则的<u>所有</u>前提；

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda}$$

v 满足 $\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda$

iff $v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \delta_j \wedge (A \vee B) \to \bigvee \lambda_k$,

G’的一些性质

引理1.44. 对于G’系统的Cut规则以外的规则，

2. 赋值 v 满足规则的结论当且仅当 v 满足规则的<u>所有</u>前提；

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda}$$

v 满足 $\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda$

iff $v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \delta_j \wedge (A \vee B) \rightarrow \bigvee \lambda_k$，

若 $v \vDash A$，……

$$v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \delta_j \wedge A \rightarrow \bigvee \lambda_k$$

若 $v \nvDash A$，……

$$v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \delta_j \wedge B \rightarrow \bigvee \lambda_k$$

G’的一些性质

引理1.44. 对于G’系统的Cut规则以外的规则，

3. <u>每个</u>前提有效当且仅当结论有效。

矢列有效 iff $\forall v$，v 满足矢列

G'的一些性质

对于Cut规则：

$$\text{Cut:}\ \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

若 v 反驳Cut的结论，即 $v \vDash \wedge \gamma_i \wedge \delta_j \wedge \neg\lambda_k \wedge \neg\theta_l$，

也即 $\hat{v}(\gamma_i) = \hat{v}(\delta_j) = \hat{v}(\neg\lambda_k) = \hat{v}(\neg\theta_l) = 1$，

则

$$v \vDash \bigwedge \gamma_i \bigwedge \neg\lambda_k \wedge \neg A \text{ 或 } v \vDash \bigwedge \delta_j \bigwedge \neg\theta_l \wedge A,$$

即 v 反驳Cut的一个前提。

G'的一些性质

对于Cut规则：

$$\text{Cut:}\ \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

若 v 反驳Cut的一个前提结论，则 v 反驳Cut的结论？

反例：$\Gamma = \{p\}, \Delta = \Lambda = \emptyset, \Theta = \{r\}$，

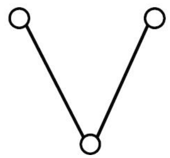
$$\frac{p \vdash q \qquad q \vdash r}{p \vdash r}\ \text{Cut}$$

取 $v(p) = v(r) = 1, v(q) = 0$。

树状推理模式

- 系统G’中只有一条公理，有多条规则，每条规则都有名称，呈形 $\frac{S'}{S}$ 或 $\frac{S_1 \quad S_2}{S}$，这可以被看作树

或

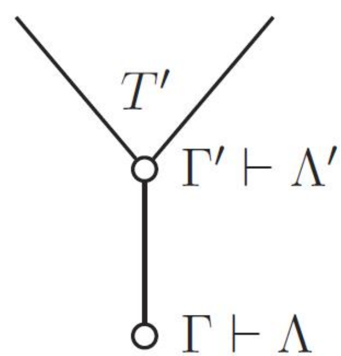


证明树

定义1.45. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指：

1. 当$\Gamma \vdash \Lambda$为G'公理，以$\Gamma \vdash \Lambda$为节点的单点树T为其证明树。

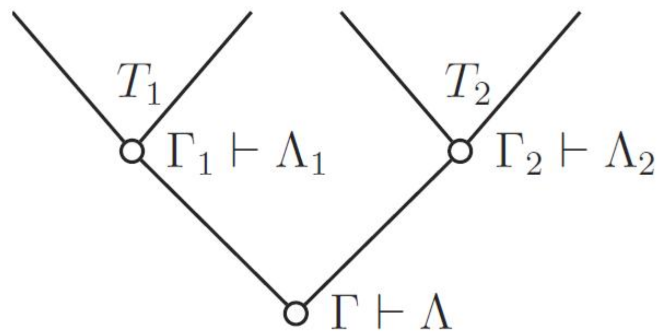
2. 当 $\frac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为G'规则，若 T' 为 $\Gamma' \vdash \Lambda'$ 的证明树，则树 T：



为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

证明树

3. 当 $\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为G'规则，若T_1和T_2分别为$\Gamma_1 \vdash \Lambda_1$和$\Gamma_2 \vdash \Lambda_2$的证明树，则树T：



为$\Gamma \vdash \Lambda$的证明树。

可证

定义1.46. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ **可证**（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例，证明：$A \vdash A$ 可证。

可证

定义1.46. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ **可证**（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例，证明：$A \vdash A$ 可证。

公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

∘ $A \vdash A$

可证

定义1.46. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ **可证**（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例，证明：$\vdash A \to A$ 可证。

可证

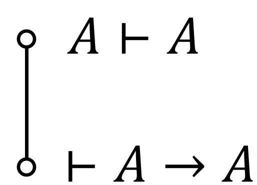
定义1.46. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ **可证**（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例，证明：$\vdash A \to A$ 可证。

公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

$$\to R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \to B, \Theta}$$

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \to A} \to R$$



可证

定义1.46. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ **可证**（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例，证明：$\vdash A \vee \neg A$ 可证。

可证

定义1.46. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ **可证**（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

$$\neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

例，证明：$\vdash A \vee \neg A$ 可证。

$$\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}\ \neg R}{\vdash A \vee \neg A}\ \vee R$$

$A \vdash A$

$\vdash A, \neg A$

$\vdash A \vee \neg A$

可证

定义1.46. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ **可证**（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

例，证明：$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$ 可证。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash}\ \neg L}{A \wedge \neg A \vdash}\ \wedge L}{\vdash \neg(A \wedge \neg A)}\ \neg R$$

可证

例，证明$\neg A \to B \vdash \neg B \to A$可证。

$$\dfrac{\neg A \to B, \neg B \vdash A}{\neg A \to B \vdash \neg B \to A} \to R$$

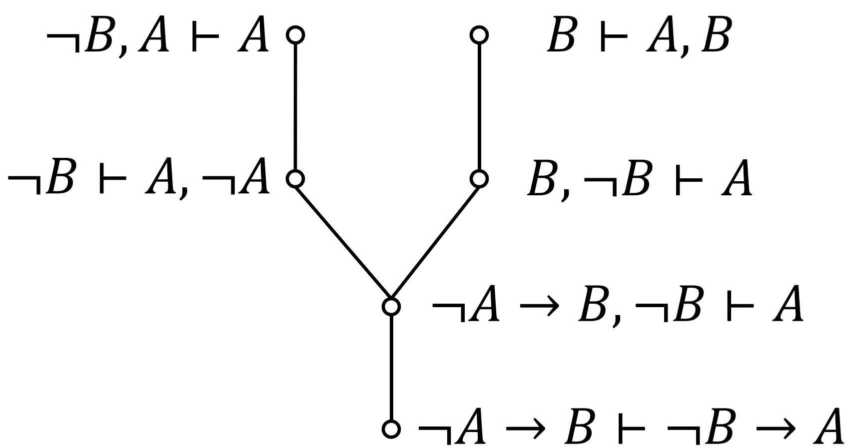
$$\dfrac{\neg B \vdash A, \neg A \quad B, \neg B \vdash A}{\neg A \to B, \neg B \vdash A} \to L$$

$$\dfrac{\neg B, A \vdash A}{\neg B \vdash A, \neg A} \neg R \qquad \dfrac{B \vdash A, B}{B, \neg B \vdash A} \neg L$$

可证

例，证明$\neg A \to B \vdash \neg B \to A$可证。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B, A \vdash A}{\neg B \vdash A, \neg A}\neg R \qquad \dfrac{B \vdash A, B}{B, \neg B \vdash A}\neg L}{\neg A \to B, \neg B \vdash A}\to L}{\neg A \to B \vdash \neg B \to A}\to R$$



自然推理系统

- G'、有效、可证等定义是不是正确？证明树是否一定存在？

- G'的可靠性和完全性
  - 可靠性：公理出发由规则得到的命题是正确的
  - 完全性：正确的命题都能通过推理从公理推出

自然推理系统

- 若 $\Gamma' \vdash \Delta'$ 为G'的公理，则 $\Gamma' \vdash \Delta'$ 在G'中可证且 $\Gamma' \vdash \Delta'$ 有效。
  - iff $\Gamma' \cap \Delta' \neq \emptyset$

公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
可证：存在 $\Gamma' \vdash \Delta'$ 的证明树
有效：$\forall v, v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$

G’的可靠性

定理1.47（G’的soundness）． 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G’中可证，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

G’的可靠性

定理1.47（G’的soundness）. 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G’中可证，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

> 可证：存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树
> 有效：$\forall v, v \vDash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$

证明：对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树的结构归纳证明 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

归纳基础：若 $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，易证 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

归纳假设：$\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树中推理 $\Gamma \vdash \Delta$ 的规则的每个前提都有效。

G’的可靠性

归纳步骤：由存在$\Gamma \vdash \Delta$的证明树，则有如下三种情况，

情况1：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta}\ (R_1)$$

由归纳假设知 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ 有效，从而由引理1.44知 $\Gamma \vdash \Delta$。

引理1.44：对于G’系统的Cut规则以外的规则，每个前提有效当且仅当结论有效。

G’的可靠性

情况2：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}\ (R_2)$$

由归纳假设知 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ 和 $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ 有效，从而由引理1.44知 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

引理1.44：对于G’系统的Cut规则以外的规则，每个前提有效当且仅当结论有效。

G'的可靠性

情况3：

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2, A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta} \text{(Cut)}$$

由归纳假设知 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$ 和 $\Gamma_2, A \vdash \Delta_2$ 有效。

假设 $\Gamma \vdash \Delta$ 不有效，即 $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例，设 v 反驳 $\Gamma \vdash \Delta$。

1. 若 $\hat{v}(A) = 1$，则 v 反驳 $\Gamma_2, A \vdash \Delta_2$，矛盾。

2. 若 $\hat{v}(A) = 0$，则 v 反驳 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$，矛盾。

故 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

有反例：$\exists v, s.t., v \vDash (A_1 \wedge ... \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge ... \wedge \neg B_n)$

$\square$

G’的完全性

定理1.48（G’的completeness）．若 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G’中可证。

G’的完全性

定理1.48（G’的completeness）. 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G’中可证。

证明：设 m 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 中联结词出现的个数，以下对 m 做归纳证明 (*)：<u>在G’中存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的一个无Cut证明树，其中规则个数 $< 2^m$</u>。

G'的完全性

归纳基础：m=0时，$\Gamma \vdash \Delta$ 中无联结词，故呈

$$P_1,\ldots,P_n \vdash Q_1,\ldots,Q_n,$$

其中 P_i 和 Q_j 均为命题符。

由于 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，即 $\forall v$

$$v \vDash (P_1 \wedge \ldots \wedge P_m) \rightarrow (Q_1 \vee \ldots \vee Q_n),$$

因此<u>必有一个命题符 P 同时出现于 $\Gamma \vdash \Delta$ 的左右两边</u>，

否则，可以构造 v 有 $v(P_i) = 1$，$v(Q_i) = 0$，从而 v 反驳 $\Gamma \vdash \Delta$，与 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效矛盾。

从而 $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，它有无规则的证明树，故 (*) 成立。

G'的完全性

归纳假设：对于$\leq \mathrm{m}-1$，都有 (*) 成立。

归纳步骤：按照联结词在 Γ, Δ 中最外位置的情况来证明 (*)。

情况1. 设 Γ 为 $\neg A, \Gamma'$。可作 $\Gamma \vdash \Delta$ 的推理如下：

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma' \vdash \Delta}$$

由 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，知前提 $\Gamma' \vdash \Delta, A$ 有效（引理1.44）。

$\Gamma' \vdash \Delta, A$ 中联结词个数 $\leq \mathrm{m}-1$，由归纳假设知 $\Gamma' \vdash \Delta, A$ 有一个无Cut证明，其中规则个数$< 2^{m-1}$。

因此 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无Cut证明，其中规则数$< 2^{m-1}+1 \leq 2^{m}$。

G'的完全性

情况2. 设 Δ 为 $\neg B, \Delta'$，与情况1同理。

情况3. 设 Γ 为 $A \wedge B, \Gamma'$，可作推理如下：

$$\frac{A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

由 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，知前提 $A, B, \Gamma' \vdash \Delta$ 有效（引理1.44）。

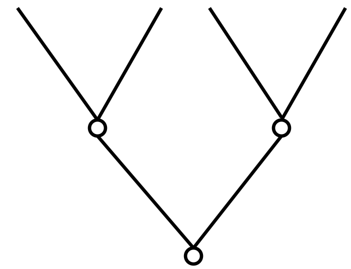
$A, B, \Gamma' \vdash \Delta$中的联结词出现个数$\leq \mathrm{m} - 1$。由归纳假设知 $A, B, \Gamma' \vdash \Delta$ 有无Cut证明树，其中规则个数 $< 2^{m-1}$。

因此 $\Gamma \vdash \Delta$ 有无Cut证明树，规则个数 $< 2^{m-1} + 1 \leq 2^m$。

G’的完全性

情况4. 设 Δ 为 $\Delta', A \wedge B$，可作推理如下：

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta', A \quad \Gamma \vdash \Delta', B}{\Gamma \vdash \Delta', A \wedge B}$$



由 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，知前提$\Gamma \vdash \Delta', A$和$\Gamma \vdash \Delta', B$有效（引理1.44）。

$\Gamma \vdash \Delta', A$ 和 $\Gamma \vdash \Delta', B$ 中的联结词出现个数$\leq \mathrm{m}-1$，由归纳假设知 $\Gamma \vdash \Delta', A$ 和 $\Gamma \vdash \Delta', B$ 均有一个无Cut证明，规则数 $< 2^{m-1}$，即 $\leq 2^{m-1}-1$。

从而 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无Cut证明，其中规则数 $\leq (2^{m-1}-1)+(2^{m-1}-1)+1 < 2^m$。

G’的完全性

其余情况同理可证。（∨, →）

$\square$

上述证明给出了一个推理方法，即从 $\Gamma \vdash \Delta$ 最外位置的联结词开始，使用规则消去联结词。

一些推论

推论1.49. $\Gamma \vdash \Delta$ 可证当且仅当 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

推论1.50. 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G'中可证，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G'中有一个无Cut证明。

（引理1.44）对于G'系统每条异于Cut的规则，每个前提可证当且仅当结论可证。

例，证明如下可证。

(1) $A \to B, A \vdash B$

(2) $A \vdash B \to A$

(3) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$

(4) $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$

例，证明 (4) $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$ 可证。

$$\cfrac{\cfrac{A \to B, A \vdash A, C \quad \boxed{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C} \to L}{A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C} \to R$$

例，证明 (4) $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$ 可证。

$$\dfrac{\dfrac{A \to B, A \vdash A, C \quad \boxed{B \to C, A \to B, A \vdash C}}{A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C} \to L}{A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C} \to R$$

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A, B, C \quad B, A \vdash B, C}{A \to B, A \vdash B, C} \to L \quad C, A \to B, A \vdash C}{\boxed{B \to C, A \to B, A \vdash C}} \to L$$

例，(1) 若 $\Gamma, A \vdash B$ 可证，$\Gamma, A \vdash \neg B$ 可证，则 $\Gamma \vdash \neg A$ 可证（归谬律）；

(2) $\neg\neg A \vdash A$ 可证；

(3) $A \vdash \neg\neg A$ 可证；

(4) $A, \neg A \vdash B$ 可证；

(5) $A \vdash \neg A \to B$ 可证；

(6) $\neg A \vdash A \to B$ 可证。

例，(1) 若 $\Gamma, A \vdash B$ 可证，$\Gamma, A \vdash \neg B$ 可证，则 $\Gamma \vdash \neg A$ 可证（归谬律）；

在G’中导出规则：

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

证明：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, A, \boxed{\neg B} \vdash}\neg L \quad \Gamma, A \vdash \boxed{\neg B}}{\Gamma, A \vdash}\text{Cut}}{\Gamma \vdash \neg A}\neg R$$

□

在G'中导出规则MP：

$$\frac{\vdash A \quad \vdash A \to B}{\vdash B}$$

证明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A \quad A \vdash A, B}{\vdash A, B}\text{Cut} \quad B \vdash B}{A \to B \vdash B} \to L \quad \vdash A \to B}{\vdash B}\text{Cut}$$

□

在G’中导出规则MP：

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash A \to B}{\vdash B}$$

证明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A \qquad A \vdash A, B}{\vdash A, B}\,\mathrm{Cut} \qquad B \vdash B}{A \to B \vdash B} \to L \qquad \vdash A \to B}{\vdash B}\,\mathrm{Cut}$$

$\square$

紧致性定理

定理1.51（compactness）. 设 Γ 为命题集，若 Γ 的任何有穷子集可满足，则 Γ 可满足。

- 注意：这里 Γ 可为无穷集合，而G'中的$\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$都是有穷集合。

定义1.52. 称 Δ 为有穷可满足指 Δ 的任何有穷子集可满足。

引理1.53. 所有命题可被排列为 $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ $(n \in N)$。

- PROP是可数无穷集。

紧致性定理

引理1.54. 设 Δ 为有穷可满足，A为命题。若 $\Delta \cup \{A\}$ 不为有穷可满足，则 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 为有穷可满足。

证明：设 $\Delta \cup \{A\}$ 不为有穷可满足，反证法。

假设 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 不为有穷可满足。

即 $\exists \Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$ 使 Δ_1, Δ_2 皆有穷集合且 $\Delta_1 \cup \{A\}$ 和 $\Delta_2 \cup \{\neg A\}$ 都不可满足。

由于 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 为 Δ 的有穷子集，故 $\exists v$ 使 $v \vDash \Delta_1 \cup \Delta_2$，

(1) 当 $v \vDash A$ 时，$v \vDash \Delta_1 \cup \{A\}$，矛盾。

(2) 当 $v \nvDash A$ 时，$v \vDash \Delta_2 \cup \{\neg A\}$，矛盾。

故 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 有穷可满足。

$\square$

$\exists \Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$ 使 Δ_1, Δ_2 皆有穷集合且 $\Delta_1 \cup \{A\}$ 和 $\Delta_2 \cup \{\neg A\}$ 都不可满足

紧致性定理的证明

定理1.51（compactness）．设 Γ 为命题集，若 Γ 的任何有穷子集可满足，则 Γ 可满足。

证明：令

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\}, & \text{若}\Gamma_n \cup \{A_n\}\text{有穷可满足，} \\ \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}, & \text{否则。} \end{cases}$$

先对 n 归纳证明 Γ_n 有穷可满足 (*)。

归纳基础：n=0时，显然 (*) 成立。

归纳假设：Γ_n 有穷可满足。

归纳步骤：若 $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ 有穷可满足，则 Γ_{n+1} 有穷可满足，否则由引理1.54知 $\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$ 有穷可满足，即 Γ_{n+1} 有穷可满足。归纳完成。

继续证 Γ 可满足。

令 $\Delta = \bigcup \{\Gamma_n | n \in N\}$，设 Φ 为 Δ 的一个有穷子集，

那么 $\exists k$ 使 $\Phi \subseteq \Gamma_0 \cup \ldots \cup \Gamma_k$，故 $\Phi \subseteq \Gamma_{k+1}$，$\Phi$可满足，

<u>因此 Δ 有穷可满足</u>。

对于任何命题符 p_i，不妨设 $A_l = p_i$。

若 $p_i \notin \Delta$，即 $A_l \notin \Delta$，则 $\Gamma_l \cup \{A_l\}$ 不是有穷可满足，

从而 $\Gamma_{l+1} = \Gamma_l \cup \{\neg A_l\}$，可知 $\neg p_i \in \Delta$。

假设 $p_i, \neg p_i \in \Delta$，

此时，Δ 的子集 $\{p_i, \neg p_i\}$ 不可满足，

故 Δ 不为有穷可满足，矛盾。

综上，$p_i \in \Delta$ 和 $\neg p_i \in \Delta$ 恰取其一。

令

$$v(p_i)=\begin{cases}T, & 若\ p_i\in\Delta\\ F, & 若\ \neg p_i\in\Delta\end{cases}$$

以下对 A 的结构作归纳：若 $A\in\Delta$ 则 $v\vDash A$，否则 $v\nvDash A$ (*)。

归纳基础：A 为命题符 p_i，由上述可知 (*) 成立。

归纳假设：对 B, C 有 (*) 成立。

归纳步骤：

情形1. $A=\neg B$。

(1) $A\in\Delta$ 时，由 Δ 有穷可满足，可知 $\{B,\neg B\}\nsubseteq\Delta$，

那么 $B\notin\Delta$。从而 $v\nvDash B$（归纳假设），$v\vDash\neg B$。

(2) $A \notin \Delta$ 时，即 $\neg B \notin \Delta$。

设 $B = A_l$，则 $\Gamma_l \cup \{B\}$ 有穷可满足，

否则 $\Gamma_{l+1} = \Gamma_l \cup \{\neg B\} \subseteq \Delta$，与$\neg B \notin \Delta$ 矛盾。

故 $B \in \Delta$，由归纳假设可知 $v \vDash B$，即 $v \nvDash A$。

情形2. $A = B \wedge C$。

(1) $A \in \Delta$ 时。假设 $B = A_l \notin \Delta$，

则 $\Gamma_l \cup \{B\}$ 非有穷可满足，即 $\Gamma_l \cup \{\neg B\}$ 有穷可满足，

那么 $\neg B \in \Gamma_{l+1} \subseteq \Delta$，但 $\{A, \neg B\}$ 不可满足，矛盾。

故 $B \in \Delta$，同理可证 $C \in \Delta$。

由归纳假设，$v \vDash B$ 且 $v \vDash C$，从而 $v \vDash B \wedge C$。

(2) $A \notin \Delta$ 时，则 $\neg A \in \Delta$。

假设 $B \in \Delta$ 且 $C \in \Delta$，

然 $\{\neg A, B, C\} \subseteq \Delta$ 不可满足，矛盾。

因此 $B \notin \Delta$ 或 $C \notin \Delta$。

不妨设 $B \notin \Delta$，从而 $v \nvDash B$，知 $v \nvDash A$。

其他情形同理可证 (*) 成立。

因此我们有 $v \vDash \Delta$，故 Δ 可满足，从而 $\Gamma \subseteq \Delta$ 可满足。

□

命题逻辑的语法

- **字母表** | 命题的定义 | 结构归纳法 | 公式的结构

定义. 命题逻辑的字母表含三类符号：

(1) 命题符号：

$$p \quad q \quad r \quad \ldots$$

(2) 联结符号（联结词）：

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$$

(3) 辅助符号（标点符号）：

$$(\quad)$$

表达式：有限的符号串

命题逻辑的语法

定义. $A \in PROP$当且仅当它能有限次地由以下(i)~(iii)生成：

(i) $PS \subseteq PROP$；

(ii) 如果$A \in PROP$，则$(\neg A) \in PROP$；

(iii) 如果$A, B \in PROP$，则$(A * B) \in PROP$。

其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。

用Bacus-Naur Form定义命题为

$$\varphi ::= P | (\neg\varphi) | (\varphi_1 \wedge \varphi_2) | (\varphi_1 \vee \varphi_2) | (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$$

其中$P \in PS$。

命题逻辑的语法

- 字母表 | 命题的定义 | **结构归纳法** | 公式的结构

对命题公式的结构作归纳（结构归纳法）

<u>如何证明所有命题公式都具有某个性质R?</u>

归纳基础：证明所有命题符具有性质R。

归纳假设：对于公式A和B，都有性质R。

归纳步骤：分情况讨论$(\neg A)$，$(A * B)$，利用归纳假设证明，上述情形生成的公式保留性质R。

命题逻辑的语法

- 字母表 | 命题的定义 | 结构归纳法 | **公式的结构**

定理. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，或$(A \to B)$；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

判定表达式是公式的算法。

命题逻辑的语义

- **命题的语义** | 语义结论 | 逻辑等价 | 析取/合取范式 | 联结词的完全组

定义. v 为一个**赋值**指它是函数 $v: PS \to \boldsymbol{B}$，从而对任何命题符P_i，$v(P_i)$ 为T或F；

定义. 对于任何赋值 v，定义 $\hat{v}: PROP \to \boldsymbol{B}$ 如下：

$\hat{v}(P_n) = v(P_n), n \in N$；

$\hat{v}(\neg A) = H_{\neg}(\hat{v}(A))$；

$\hat{v}(A * B) = H_{*}(\hat{v}(A), \hat{v}(B))$，其中$* \in \{\wedge, \vee, \to\}$。

对于命题A，它在赋值v下的**解释** $\hat{v}(A)$ 为T或F。

命题逻辑的语义

- 命题的语义 | **语义结论** | 逻辑等价 | 析取/合取范式 | 联结词的完全组

定义. 设$A \in PROP$，v为赋值，$\Gamma \subseteq PROP$。

1. v **满足** A，记为 $v \vDash A$，指 $\hat{v}(A) = T$；

   A 是**可满足的**，指 $\exists v$ 使得 $v \vDash A$；

2. v **满足** Γ，记为 $v \vDash \Gamma$，指对于 $\forall B \in \Gamma$，$v \vDash B$；

   Γ 是**可满足的**，指 $\exists v$ 使得 $v \vDash \Gamma$。

定义. 设$A \in PROP$，v为赋值，$\Gamma \subseteq PROP$。

A 是 Γ 的**语义结论**（也称**逻辑推论**），记为 $\Gamma \vDash A$，

指对所有 v，若$v \vDash \Gamma$，则 $v \vDash A$。

定义. 设A, B为命题，A与B**逻辑等价**（也称**逻辑等值**），记为$A \simeq B$，指对于任意赋值v，$v \vDash A$当且仅当$v \vDash B$。

定理（等值替换）. 若$B \simeq C$且在A中把B的某些出现替换为C而得到A'，则$A \simeq A'$。

(1) $A \to B \simeq \neg A \vee B$；

(2) $A \leftrightarrow B \simeq (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$；

(3) $A \leftrightarrow B \simeq (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$；

……

命题逻辑的语义

- 命题的语义 | 语义结论 | 逻辑等价 | **析取/合取范式** | 联结词的完全组

定义（文字，子句）.

（1）命题符和命题符的否定式称为**文字**（Literal）；

（2）以文字为析（合）取项的析（合）取式称为**析（合）取子式**，简称**子式**，也称**子句**（Clause）。

定义（范式 Normal Form）.

（1）命题A为**析取范式**（∨∧-nf，DNF），指A为 m 个合取子式的析取式，呈形 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n_i} P_{i,k})$。

（2）命题A为**合取范式**（∧∨-nf，CNF），指A为 l 个析取子式的合取式，呈形 $\bigwedge_{j=1}^{l}(\bigvee_{k=1}^{n_j} Q_{j,k})$。

命题逻辑的语义

- 命题的语义 | 语义结论 | 逻辑等价 | **析取/合取范式** | 联结词的完全组

定理. 设$f: \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$，

（1）存在命题A，其为 ∨∧-nf 使 $f = H_A$；

（2）存在命题A’，其为 ∧∨-nf 使 $f = H_{A'}$。

命题. 若 A 为命题，则存在合取范式 B 和析取范式 B' 使$A \simeq B$ 且 $A \simeq B'$，也称 B 和 B' 分别为 A 的合取范式和析取范式。

命题逻辑的语义

- 命题的语义 | 语义结论 | 逻辑等价 | 析取/合取范式 | **联结词的完全组**

一个命题公式A，它的真值函数H_A是一个n元真值函数，对应一个n元联结词。

称联结词的集合是完备的，iff 任意n元的联结词都能由集合中的联结词定义。

定理. $\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词的完全组。

推论. $\{\neg, \wedge\}$，$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \rightarrow\}$是联结词的完全组。

自然推理系统及性质

- **自然推理系统G'** | 有效 | 可证 | 可靠性 完全性 紧致性

定义. $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$ 表示任何命题有穷集合（可为空），一个矢列（sequent）是一个二元组 (Γ, Δ)，记为 $\Gamma \vdash \Delta$。命题逻辑的自然推理系统 G' 由以下公理和规则组成，A, B 表示任何命题。

- 公理：$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
- 规则：

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \qquad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

$$\rightarrow L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \rightarrow R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \rightarrow B, \Theta}$$

$$\text{Cut}: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

自然推理系统及性质

- 自然推理系统G' | **有效** | 可证 | 可靠性 完全性 紧致性

定义. 设 $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$，$\Delta = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$，

1. $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例（falsifiable），指存在赋值 v，使得

$$v \vDash (A_1 \wedge ... \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge ... \wedge \neg B_n),$$

这里称 v **反驳** $\Gamma \vdash \Delta$。

2. $\Gamma \vdash \Delta$ **有效**（valid），指对任何赋值 v，有

$$v \vDash (A_1 \wedge ... \wedge A_m) \to (B_1 \vee ... \vee B_n),$$

这里称 v **满足** $\Gamma \vdash \Delta$。

3. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效也被记为 $\Gamma \vDash \Delta$。

特例 4. 5. 6.

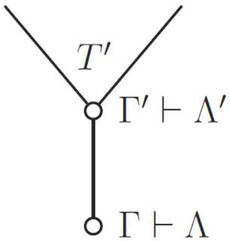
自然推理系统及性质

- 自然推理系统G' | 有效 | **可证** | 可靠性 完全性 紧致性

定义. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指：

1. 当$\Gamma \vdash \Lambda$为G’公理，以$\Gamma \vdash \Lambda$为节点的单点树T为其证明树。

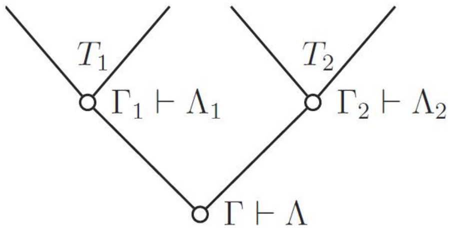
2. 当 $\frac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为G’规则，若 T’ 为 $\Gamma' \vdash \Lambda'$ 的证明树，则树 T：



为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

3. 当 $\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为G’规则，若T_1和T_2分别为$\Gamma_1 \vdash \Lambda_1$和$\Gamma_2 \vdash \Lambda_2$的证明树，则树T：

为$\Gamma \vdash \Lambda$的证明树。



定义. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，$\Gamma \vdash \Lambda$ **可证** 指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

自然推理系统及性质

- 自然推理系统G' | 有效 | 可证 | **可靠性 完全性 紧致性**

定理（G'的soundness）． 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G'中可证，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

定理（G'的completeness）． 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在G'中可证。

定理（compactness）． 设Γ为命题集，若Γ的任何有穷子集可满足，则Γ可满足。