南京大学
Nanjing University

数理逻辑

葛存菁

南京大学人工智能学院

课程信息

- 葛存菁 (gecunjing@nju.edu.cn)
- 王烨阳（助教 502024370036@smail.nju.edu.cn）

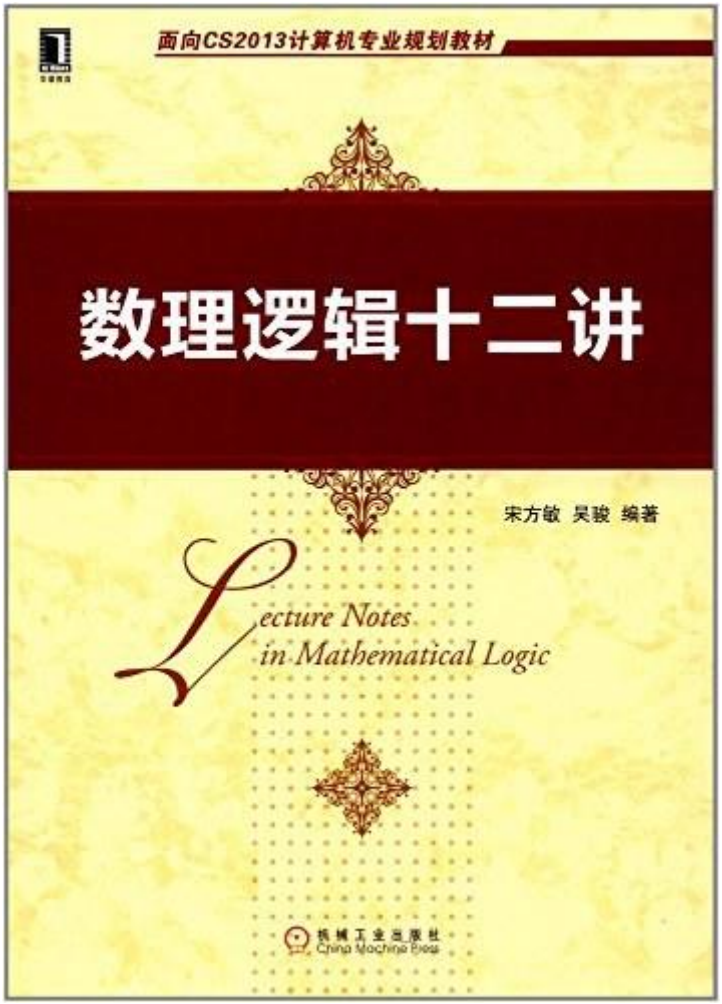
- 课件和作业链接
  - https://gecunjing.github.io/Logic/2025/

课程信息

- 成绩：
  - 平时成绩（30%）
  - 期中考试（20%）
  - 期末考试（50%）

- 作业：
  - 每两周交一次
  - 迟交按70%算（特殊原因联系我或助教）

课本

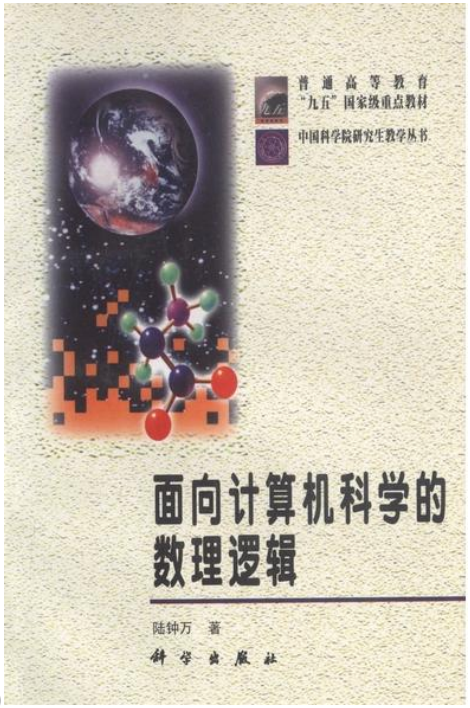

面向CS2013计算机专业规划教材
数理逻辑十二讲
宋方敏 吴骏 编著
Lecture Notes in Mathematical Logic
机械工业出版社
China Machine Press

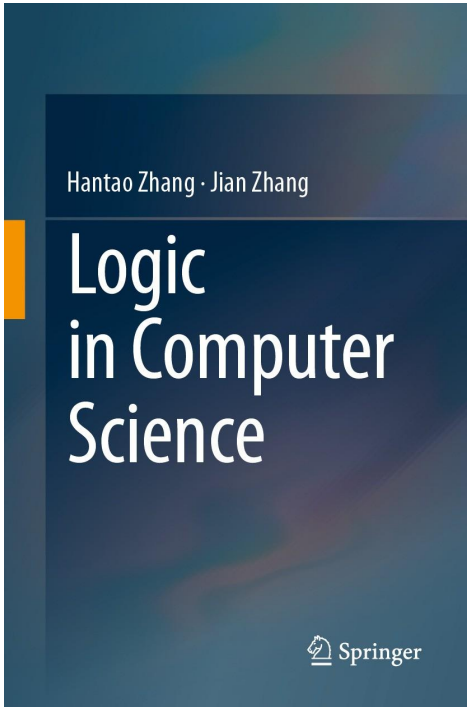
推荐书籍

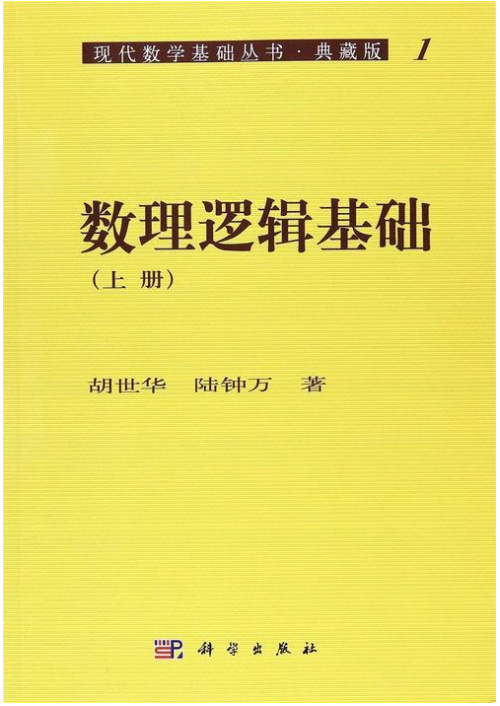
[1] 陆钟万，面向计算机科学的数理逻辑

[2] Hantao Zhang, Jian Zhang, Logic in Computer Science - Problem Solving by Logic Tools

[3] 胡世华，陆钟万，数理逻辑基础，上下







什么是数理逻辑？

例子

- All men are mortal

  Socrates is a man

  Therefore, Socrates is mortal

例子

- All men are mortal

  Socrates is a man

  Therefore, Socrates is mortal

- 推理正确，前提与结论为真

例子

- All men are mortal

  Socrates is a man

  Therefore, Socrates is mortal

- 推理正确，前提与结论为真

- 所有学生打网球（前提）

  小王不打网球（前提）

  小王不是学生（结论）

- 推理也正确，但前提与结论未必为真

三段论

- 历史上可追溯到亚里士多德
- All men are mortal

  Socrates is a man

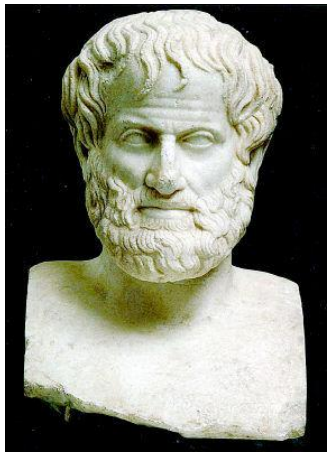
  Therefore, Socrates is mortal

- 基本形式

  大前提： **All M are** P

  小前提：**All** S **are M**

  结论：**All** S **are** P



Aristotle
(384BC - 324BC)

例子

- 所有的牛都有角（前提）
  有些动物是牛（前提）
  因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确

例子

- 所有的牛都有角（前提）
  有些动物是牛（前提）
  因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确

- 推理方法的正确性
- 前提与结论的真假

两件事

例子

- 白头翁是一种鸟
  老李是一个白头翁
  因此，老李是一个鸟

例子

- 白头翁是一种鸟
  老李是一个白头翁
  因此，老李是一个鸟
- 推理不正确（自然语言相似不保证逻辑形式上相同）

例子

- 白头翁是一种鸟
  老李是一个白头翁
  因此，老李是一个鸟
- 推理不正确（自然语言相似不保证逻辑形式上相同）
- 两套语言
  - 被讨论的语言，称为**对象语言**
  - 讨论对象语言所用的语言，称为**元语言**

符号逻辑

- 自然语言表达人的思想与情感，

  符号逻辑 —— 思想与推理的**形式语言**。

  符号构成公式，公式表示命题……

符号逻辑

- 自然语言表达人的思想与情感，

  符号逻辑 —— 思想与推理的**形式语言**。

  符号构成公式，公式表示命题……

- 语法（Syntax）与语义（Semantics）的分离。
  - 语法：符号表达式的形式结构
  - 语义：符号和符号表达式的涵义

符号逻辑

- 自然语言表达人的思想与情感，

  符号逻辑 —— 思想与推理的**形式语言**。

  符号构成公式，公式表示命题……

- 语法（Syntax）与语义（Semantics）的分离。
  - 语法：符号表达式的形式结构
  - 语义：符号和符号表达式的涵义

- 自然语言中命题的逻辑形式可以做到精确，但是不如形式语言方便

什么是数理逻辑？

- 用数学的方法研究逻辑问题的学科
  - 研究如何正确的推理（推理方法、语言）

- 传统上，数学不把推理方法和语言作为研究的对象

现代逻辑-萌芽时代

- *The only way to rectify our reasoning is to make them as tangible as those of the Mathematicians, so that we can find our error at a glance, and when there are disputes among persons, we can simply say: Let us calculate , without further ado, to see who is right.*

-- G. W. Leibniz, The Art of Discovery(1685)

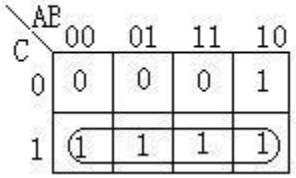
Gottfried Wilhelm Leibniz

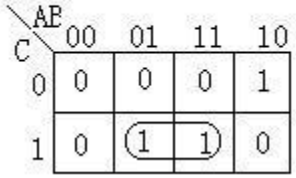
（1646-1716）

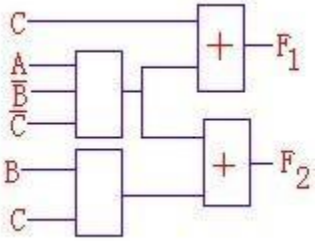
- 通用语言&通用数学

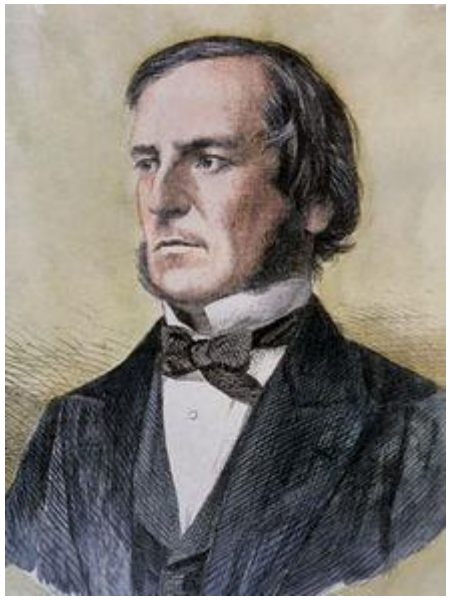
现代逻辑-代数时代

- 建立人类思维的代数规律的系统，boolean algebra。





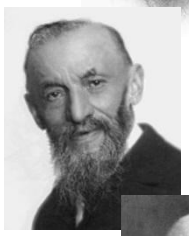
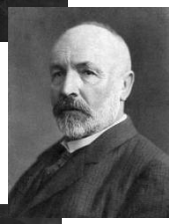




G.Boole（1815—1864）

现代逻辑-逻辑主义时代

- Gottlob Frege（1848—1925）1879出版Begriffsschrift（概念文字），严格建立人类第一个人工的形式语言PK。
- Giuseppe Peano（1858—1932）建立算术的形式语言PA（Peano's Arithmatic）
- Georg Cantor（1845—1918）建立Set Theory，表达整个数学的形式语言
- Ernst Zermelo(1871-1953) 创立第一个Axiomatic Set Theory。
- Bertrand Russell（1872—1970）与他老师Whitehead合著Principia Mathematica（3卷）
  - Russell's Paradox曾使整个数学基础为之震动…

罗素悖论

- 一位理发师："我给所有不给自己刮胡子的人刮胡子，也只给这些人刮胡子。"
- 那么，他能不能给自己刮胡子呢？

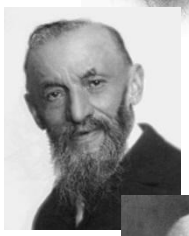
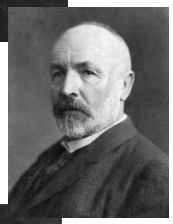
罗素悖论

- 一位理发师："我给所有不给自己刮胡子的人刮胡子，也只给这些人刮胡子。"
- 那么，他能不能给自己刮胡子呢？

- 将所有不包含自身元素的集合构成一个集合S，即$S = \{X: X \notin X\}$，那么S是否属于S呢？
  - 要么$S \in S$，要么$S \notin S$，但此处无论怎样都存在矛盾。

现代逻辑-逻辑主义时代

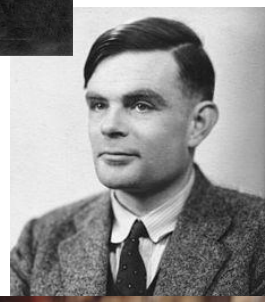
- Gottlob Frege（1848—1925）1879出版Begriffsschrift（概念文字），严格建立人类第一个人工的形式语言PK。
- Giuseppe Peano（1858—1932）建立算术的形式语言PA（Peano's Arithmatic）
- Georg Cantor（1845—1918）建立Set Theory，表达整个数学的形式语言
- Ernst Zermelo(1871-1953) 创立第一个Axiomatic Set Theory。
- Bertrand Russell（1872—1970）与他老师Whitehead合著Principia Mathematica（3卷）
  - Russell's Paradox曾使整个数学基础为之震动…

现代逻辑-元数学时代

- David Hilbert（1862—1943）著作几何基础，数学基础，建立几何和数学的形式语言。

- Alan Turing（1913—1954）提出Turing Machine（算法的理想模型），建立Computation的形式语言

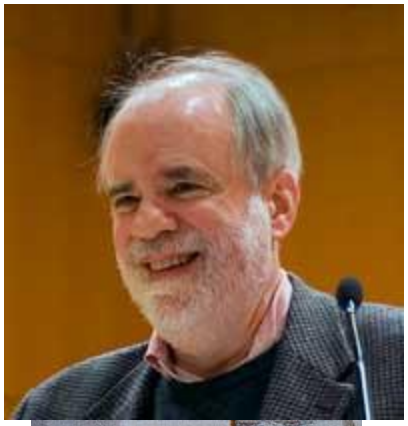


- Alfred Tarski (1901-1983) 定义Logical Consequence，创立语义学；

- Kurt Gödel（1906-1978）PK的完全性定理 PA的不完全性定理

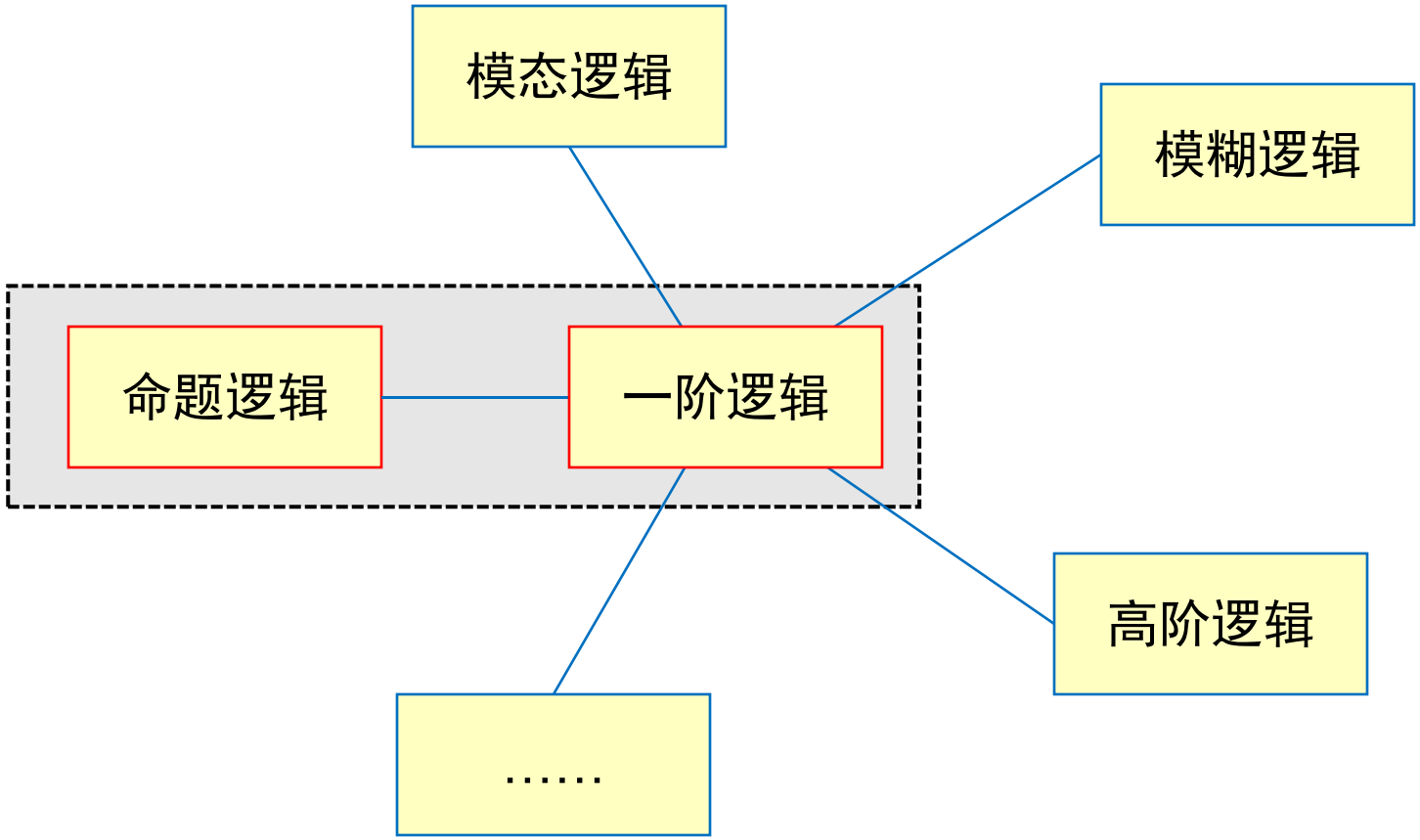
现代逻辑-战后时代

- 四论
  - 证明论
  - 模型论
  - 递归论（可计算性理论）
  - 公理化集合论



- Saul Kripke
- Jaakko Hintikka
- …

逻辑家族



数理逻辑与计算机科学

- 数理逻辑的研究孕育了计算机科学…
  - Alan Turing, “On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem”, 1936　提出了Turing Machine —算法的通用模型;
  - John von Neumann，Von Neumann architecture
- 数理逻辑在计算机科学中有诸多应用
  - 数字逻辑电路
  - 程序设计语言
  - 时态逻辑与模型检测
  - 知识表示与推理
  - ……

与人工智能什么关系？

机器的优势

- 机器的计算能力强于人类
  - 计算更快速
  - 存储更准确、快速
  - 不间断工作
  - ……

人工智能的作用

- 提高人类工作的速度、准确性和效果
  - 解放劳动力、提高生产效率

智能行为

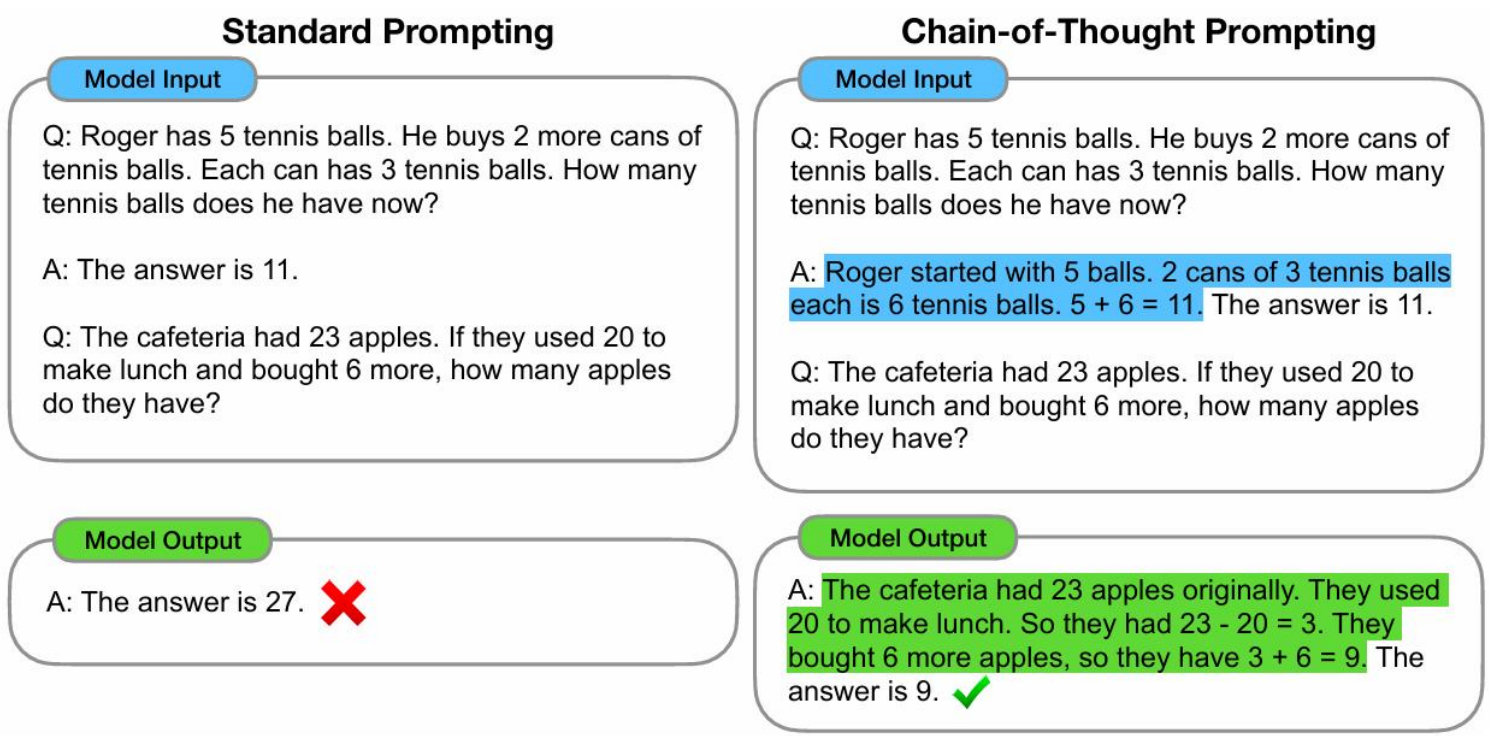
- 行动（物质）
  - 抓取、行走……
- 感知（物质&精神）
  - 看、听、闻、感觉……
- 认知（精神）
  - 思考、推理、计算、交流……

如何通过计算进行推理？

- 符号方法（逻辑公式求解）
- 机器学习方法（例如，思维链CoT）

大语言模型推理

- 思维链（Chain of Thought）
  - 任务分解、逐步解决



大语言模型推理

- 思维链（Chain of Thought）
  - 任务分解、逐步解决

提高可解释性✔
提高推理能力✔

推理正确性没有保证✘
（大模型“幻觉”问题）

Standard Prompting

Model Input

Q: Roger has 5 tennis balls. He buys 2 more cans of tennis balls. Each can has 3 tennis balls. How many tennis balls does he have now?

A: The answer is 11.

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

Model Output

A: The answer is 27. ✘

Chain-of-Thought Prompting

Model Input

Q: Roger has 5 tennis balls. He buys 2 more cans of tennis balls. Each can has 3 tennis balls. How many tennis balls does he have now?

A: Roger started with 5 balls. 2 cans of 3 tennis balls each is 6 tennis balls. 5 + 6 = 11. The answer is 11.

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

Model Output

A: The cafeteria had 23 apples originally. They used 20 to make lunch. So they had 23 - 20 = 3. They bought 6 more apples, so they have 3 + 6 = 9. The answer is 9. ✔

如何通过计算进行推理？

- 符号方法（逻辑公式求解）
- 机器学习方法（例如，思维链CoT）

符号方法进行推理

- 简单推理题：

甲、乙、丙三人，每个人要么是只说真话的老实人，要么是只说假话的骗子。

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

问：丙是老实人还是骗子？

符号方法进行推理

- 简单推理题：

甲、乙、丙三人，每个人要么是只说真话的老实人，要么是只说假话的骗子。

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

问：丙是老实人还是骗子？

- 假设丙是老实人，那么……
  - 假设甲也是老实人，那么……否则

符号方法进行推理

- 令变量a表示“甲是老实人”，b表示“乙是老实人”，c表示“丙是老实人”
- a为真即“甲是老实人”为真

符号方法进行推理

- 令变量a表示“甲是老实人”，b表示“乙是老实人”，c表示“丙是老实人”
- a为真即“甲是老实人”为真

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$$

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = c)$$

符号方法进行推理

- 令变量a表示“甲是老实人”，b表示“乙是老实人”，c表示“丙是老实人”
- a为真即“甲是老实人”为真

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$$

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = c)$$

假设丙是老实人，那么…

代入$c = 1$，可计算得

$(b = 1) \leftrightarrow (a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$，

矛盾！

符号方法进行推理

甲说："乙是骗子"。

乙说："甲和丙是同一类人"。

$$(a=1)\leftrightarrow(b=0)$$

$$(b=1)\leftrightarrow(a=c)$$

- 假设丙是骗子，那么…
  - 假设甲是老实人，那么…否则

代入$c=0$，可计算得

$$\begin{cases}(a=1)\leftrightarrow(b=0)\\(b=1)\leftrightarrow(a=0)\end{cases}$$

代入$a=1$，得

$$\begin{cases}1\leftrightarrow(b=0)\\(b=1)\leftrightarrow 0\end{cases}$$

符号方法进行推理

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a=1) \leftrightarrow (b=0)$$

$$(b=1) \leftrightarrow (a=c)$$

- 假设丙是骗子，那么…
  - 假设甲是老实人，那么…否则

代入$c=0$，可计算得

$$\begin{cases}(a=1) \leftrightarrow (b=0) \\ (b=1) \leftrightarrow (a=0)\end{cases}$$

代入$a=1$，得

$$\begin{cases}1 \leftrightarrow (b=0) \\ (b=1) \leftrightarrow 0\end{cases}$$

- a=1, b=0, c=0
- a=0, b=1, c=0

符号方法进行推理

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$$

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = c)$$

- 表示+推理
  - 知识表示
  - 自动推理

自动定理证明

- 基于逻辑推理的证明辅助工具

Coq

[Barras et al., 1997]

Isabelle

[Nipkow et al., 2002]

Lean

[de Moura et al., 2015]

自动定理证明

```
Check forall A (X: A -> Prop), X ∪ ∅ == X.

Check forall A B (X Y: A -> B -> Prop), X ∪ (Y ∩ X) ⊆ X.
```

公理、引理、定理库（由逻辑公式表示）

待证的前提与结论（由逻辑公式表示）

证明：

由前提1、前提2、引理a，可得……

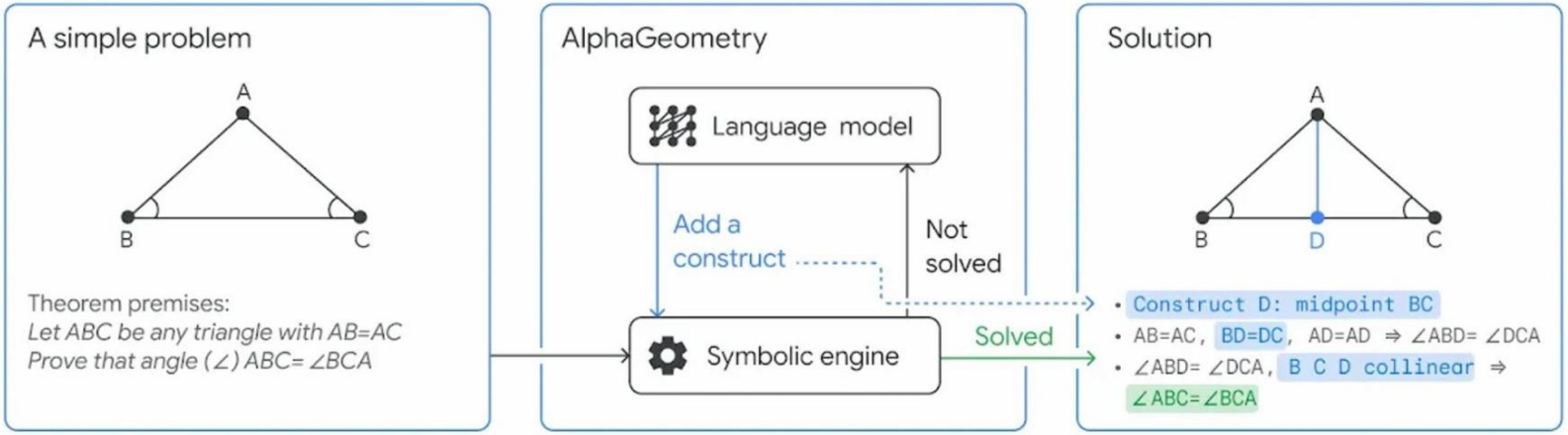
……

搜索空间爆炸

```
Example Sets2_proof_sample1: forall A B (X Y Z: A -> B -> Prop),
  X ∪ Y ⊆ Z ->
  Y ⊆ Z.
Proof.
  intros.
  Sets_unfold in H.
  Sets_unfold.
  intros a b.
  specialize (H a b).
  tauto.
Qed.
```

自动定理证明

- AlphaGeometry (DeepMind, 2024)

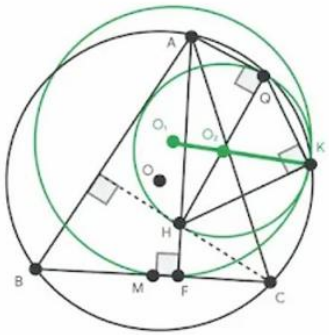


自动定理证明

- AlphaGeometry (DeepMind, 2024)

IMO 2015 P3

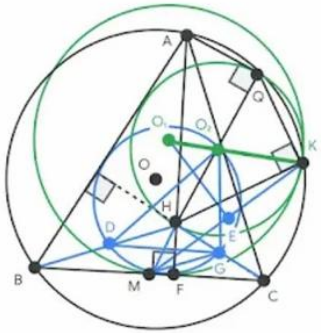
Let ABC be an acute triangle. Let (O) be its circumcircle, H its orthocenter, and F the foot of the altitude from A. Let M be the midpoint of BC. Let Q be the point on (O) such that QH ⊥ QA and let K be the point on (O) such that KH ⊥ KQ. Prove that the circumcircles (O_1) and (O_2) of triangles FKM and KQH are tangent to each other.



AlphaGeometry →

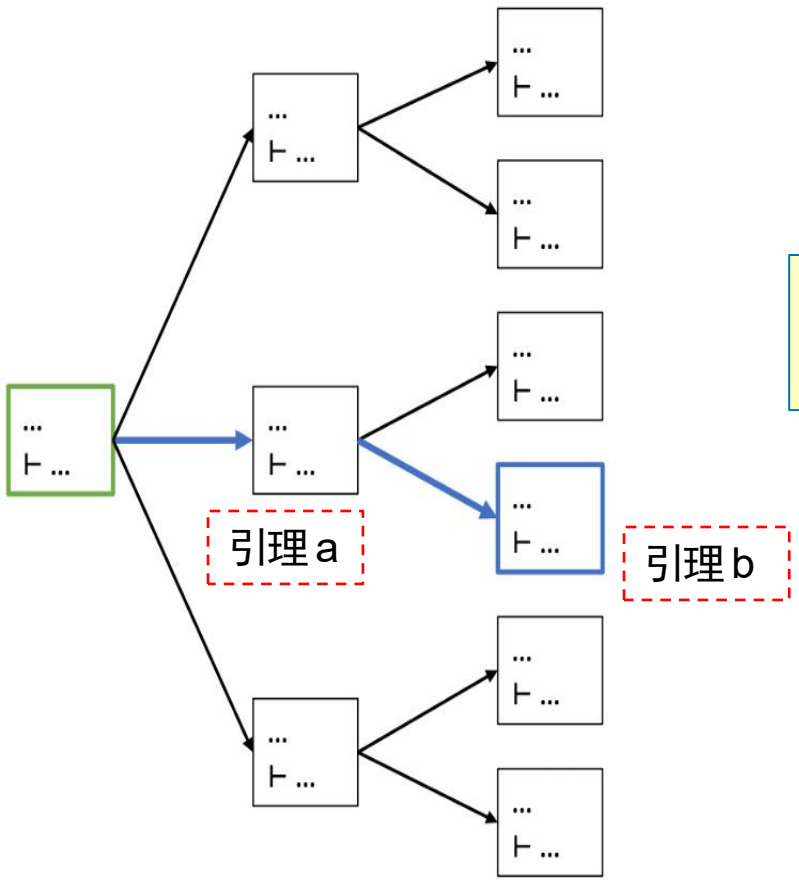
Solution

```
[...]
Construct D: midpoint BH [a]
[a], O2 midpoint HQ ⇒ BQ || O2D [20]
[...]
Construct G: midpoint HC [b]
∠GMD = ∠GO2D ⇒ M O2 G D cyclic [26]
[...]
[a],[b] ⇒ BC || DG [30]
[...]
Construct E: midpoint MK [c]
[c] ⇒ ∠KFC = ∠KO1E [104]
[...]
∠FKO1 = ∠FKO2 ⇒ KO1 || KO2 [109]
[109] ⇒ O1O2K collinear ⇒ (O1)(O2) tangent
```



自动定理证明

- AlphaProof (DeepMind, 2024, IMO银牌)



形式化后的定理证明问题
本质上是一个搜索问题

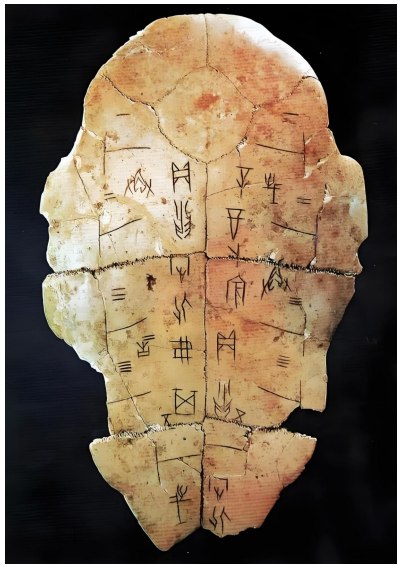
“推理+学习”的难题

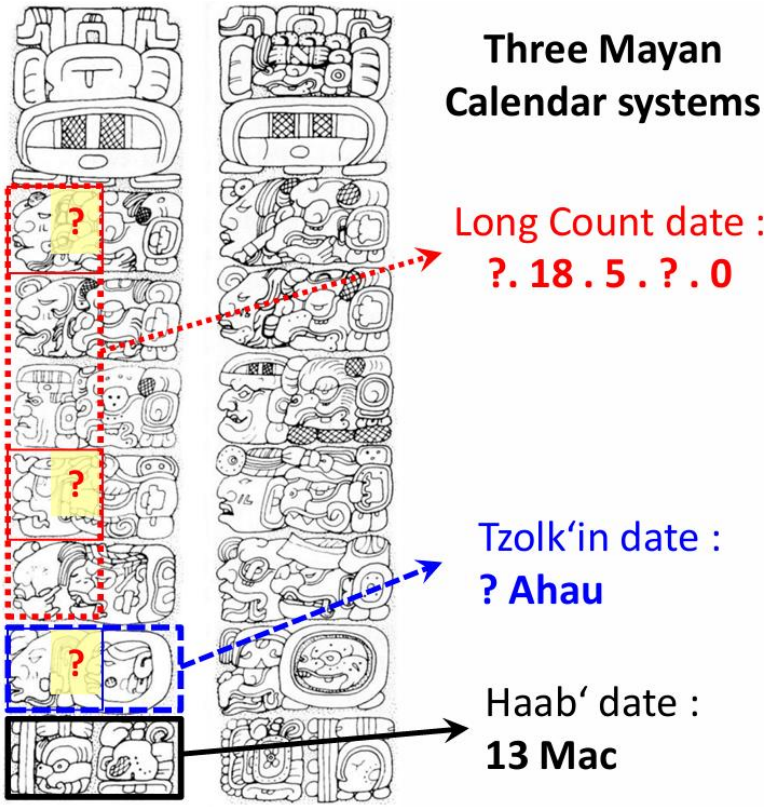
- 人工智能领域有一个长期存在的“圣杯”问题
  - 推理+学习，提出一个统一的框架

“推理+学习”的难题

- 人工智能领域有一个长期存在的“圣杯”问题
  - 推理+学习，提出一个统一的框架

- 古文字的识别





“推理+学习”的难题

- 人工智能领域有一个长期存在的“圣杯”问题
  - 推理+学习，提出一个统一的框架

- 古文字的识别
- 新疾病的诊断

“推理+学习”的难题

- 人工智能领域有一个长期存在的“圣杯”问题
  - 推理+学习，提出一个统一的框架

- 逻辑推理更容易利用知识；
- 机器学习更容易利用数据、证据、事实；
- 从人类决策来看，常常同时要使用知识以及证据。

“推理+学习”的应用

- 可信、可解释的人工智能
  - 安全攸关领域
    - 航空、航天、轨道交通、核能等
  - 自动化芯片设计
    - 99.99999%正确也不够
    - 正确性验证的成本很高
    - 可解释性不足导致定位和修复问题几乎不可能

- 对新事物、新环境的适应性
  - 数据少（或数据成本高）
  - 知识不准确

软硬件的验证问题

- 有界模型检验（2007年图灵奖）

软硬件的验证问题

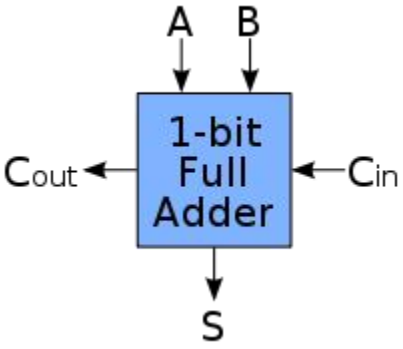
- 有界模型检验（2007年图灵奖）
- 芯片验证
  - 等价性检验、断言的验证、调试等

用 *命题逻辑公式* 表示电路：

$A + B + C_{in} = C_{out}S \Leftrightarrow$

$C_{out} = (A \text{ and } B) \text{ or } (C_{in} \text{ and } (A \text{ or } B))$

$S = A \text{ xor } B \text{ xor } C_{in}$



软硬件的验证问题

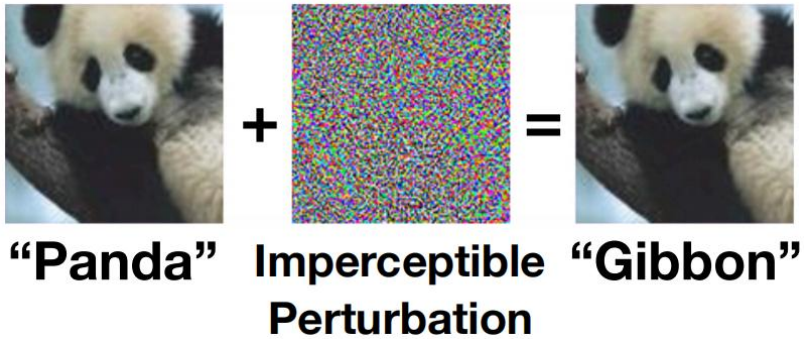
- 有界模型检验（2007年图灵奖）
- 芯片验证
  - 等价性检验、断言的验证、调试等
- 程序分析、软件验证
  - 可达性检验、等价性检验等

```
int GCD (int x, int y)
  while (true) {
    int m = x % y;
    if (m == 0) return y;
    x = y;
    y = m;
  }
}
```

```
int GCD (int x0, int y0) {
  int m0 = x0 % y0;          (m0 = x0 % y0)     ∧
  assert (m0 != 0);          ¬(m0 = 0)          ∧
  int x1 = y0;               (x1 = y0)          ∧
  int y1 = m0;               (y1 = m0)          ∧
  int m1 = x1 % y1;          (m1 = x1 % y1)     ∧
  assert (m1 == 0);          (m1 = 0)
}
```

程序的执行路径可以由*一阶逻辑公式* 表示

软硬件的验证问题

- 有界模型检验（2007年图灵奖）
- 芯片验证
  - 等价性检验、断言的验证、调试等
- 程序分析、软件验证
  - 可达性检验、等价性检验等
- 神经网络的验证

神经网络可以由*一阶逻辑公式*表示