



一阶逻辑





例子

- 所有的牛都有角（前提）
有些动物是牛（前提）
因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确

例子

- 所有的牛都有角（前提）
有些动物是牛（前提）
因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确
- 量词
 - 超出命题逻辑语言的表达能力
 - p 为“所有的牛都有角”， q 为“有些动物是牛”， r 为“所有动物有角”
 - $(p \wedge q) \rightarrow r$ ，无法判断推理的正确性
- 谓词
 - “xx有角”，“xx是牛”



一阶逻辑

语法





一阶逻辑语言的字母表

定义1.11. 一阶语言的字母表由以下两个集合组成:

(1) 逻辑符集合:

变元集 V : 可数无穷集 $V = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$

联结词: $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

量词: $\forall \quad \exists$

等词: $\doteq$

辅助符: $(\quad) \quad . \quad ,$

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成:



一阶逻辑语言的字母表

定义1.11. 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 V ：可数无穷集 $V = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$

联结词： $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$

量词： $\forall$ $\exists$

等词： $\doteq$

辅助符： $()$ $.$ $,$

1. 与命题符不同

2. $|V| = |\mathbb{N}|$

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：



一阶逻辑语言的字母表

定义1.11. 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 V ：可数无穷集 $V = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$

联结词： $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

量词： $\forall \quad \exists$

等词： $\doteq$

辅助符： $(\quad) \quad . \quad ,$

完全子集 $\{\neg, \rightarrow\}$

1. 与命题符不同

2. $|V| = |N|$

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：



一阶逻辑语言的字母表

定义1.11. 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 V ：可数无穷集 $V = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$

联结词： $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$

量词： $\forall$ $\exists$

等词： $\doteq$

辅助符： $()$ $.$ $,$

完全子集 $\{\neg, \rightarrow\}$

与联结词 $\leftrightarrow$ 不同

1. 与命题符不同

2. $|V| = |N|$

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：



一阶逻辑语言的字母表

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成:

(a) $\mathcal{L}_c$ 由可数 (包括0个) **常元符** 组成, $\mathcal{L}_c = \{c_0, c_1, \dots\}$ 。

(b) $\mathcal{L}_f$ (函数集) 由可数**函数符**组成, $\mathcal{L}_f = \{f_0, f_1, \dots\}$,

对每个函数符 f , 赋予一个正整数 $\mu(f)$, 为 f 的元数。

(c) $\mathcal{L}_p$ (谓词集) 由可数**谓词符**组成, $\mathcal{L}_p = \{P_0, P_1, \dots\}$,

对每个谓词符 P , 赋予一个非负整数 $\mu(P)$, 为 P 的元数。



一阶逻辑语言的字母表

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

(a) $\mathcal{L}_c$ 由可数（包括0个）**常元符**组成， $\mathcal{L}_c = \{c_0, c_1, \dots\}$ 。

(b) $\mathcal{L}_f$ （函数集）由可数**函数符**组成， $\mathcal{L}_f = \{f_0, f_1, \dots\}$ ，

对每个函数符 f ，赋予一个正整数 $\mu(f)$ ，为 f 的元数。

(c) $\mathcal{L}_p$ （谓词集）由可数**谓词符**组成， $\mathcal{L}_p = \{P_0, P_1, \dots\}$ ，

对每个谓词符 P ，赋予一个非负整数 $\mu(P)$ ，为 P 的元数。

1. 谓词也称关系符号
2. 等词 $=$ 是一个特别的谓词
3. $\mu(P) = 0$ 时，称 P 为命题符
4. $\mathcal{L}_f$ 和 $\mathcal{L}_p$ 可以为空集



字母表的一些说明

例，初等算术语言 $\mathcal{A}$ ：

常元符集为 $\{0\}$ ；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$ ；

谓词符集为 $\{<\}$ 。



字母表的一些说明

例，初等算术语言 $\mathcal{A}$ ：

常元符集为 $\{0\}$ ；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$ ；

谓词符集为 $\{<\}$ 。

S 为后继函数（一元）
 $S(n) = n + 1$ （语义层面）

$\mathcal{A}$ 的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists \forall S(+ (x_0, x_1))$$



字母表的一些说明

例，初等算术语言 $\mathcal{A}$ ：

常元符集为 $\{0\}$ ；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$ ；

谓词符集为 $\{<\}$ 。

S 为后继函数（一元）
 $S(n) = n + 1$ （语义层面）

$\mathcal{A}$ 的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists \forall S(+ (x_0, x_1))$$

$$\begin{aligned} \cdot (x, 0) &\doteq 0 \\ x \cdot 0 &\doteq 0 \end{aligned}$$



字母表的一些说明

例，初等算术语言 $\mathcal{A}$ ：

常元符集为 $\{0\}$ ；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$ ；

谓词符集为 $\{<\}$ 。

S 为后继函数（一元）

$S(n) = n + 1$ （语义层面）

$\mathcal{A}$ 的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists \forall S(+ (x_0, x_1))$$

$$\cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$x \cdot 0 \doteq 0$$

表达式不一定是公式



字母表的一些说明

例，群论语言 $\mathbb{G}$ ：

常元符集为 $\{e\}$ ；

函数符集为 $\{\cdot \text{ (二元) }, ^{-1} \text{ (一元) }\}$ 。

$\mathbb{G}$ 的表达式：

$$\forall x. (\cdot (x, e) \doteq x \wedge \cdot (e, x) \doteq x)$$



项 (term)

定义1.12 (项). 项是指由以下的(i)~(iii) (有限次使用) 生成。

- (i) 每个变元符为项;
- (ii) 每个常元符为项;
- (iii) 若 f 为 n 元函数, $t_1, \dots, t_n$ 为项, 则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 为项。

归纳定义



公式 (formula)

定义1.13 (公式) . **原子公式**由以下(i)(ii) (有限次) 生成。

- (i) 若 s 和 t 为项, 则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。
- (ii) 若 R 为 n 元谓词符, 且 $t_1, \dots, t_n$ 为项, 则 $R(t_1, \dots, t_n)$ 为原子公式。

公式由以下(i)~(iv) (有限次使用) 生成。

- (i) 原子公式为公式;
- (ii) 若 A 为公式, 则 $(\neg A)$ 为公式;
- (iii) 若 A, B 为公式, 则 $(A * B)$ 为公式, 其中 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- (iv) 若 A, B 为公式且 x 为变元, 则 $\forall x. A$ 和 $\exists x. B$ 为公式。



公式 (formula)

定义1.13 (公式) . **原子公式**由以下(i)(ii) (有限次) 生成。

- (i) 若 s 和 t 为项, 则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。
- (ii) 若 R 为 n 元谓词符, 且 $t_1, \dots, t_n$ 为项, 则 $R(t_1, \dots, t_n)$ 为原子公式。

公式由以下(i)~(iv) (有限次使用) 生成。

- (i) 原子公式为公式;
- (ii) 若 A 为公式, 则 $(\neg A)$ 为公式;
- (iii) 若 A, B 为公式, 则 $(A * B)$ 为公式, 其中 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- (iv) 若 A, B 为公式且 x 为变元, 则 $\forall x. A$ 和 $\exists x. B$ 为公式。

若 f 和 g 为函数符,

$\neg f(x)$ ✗

$f(x) \wedge g(x, y)$ ✗



公式 (formula)

定义1.13 (公式) . **原子公式**由以下(i)(ii) (有限次) 生成。

- (i) 若 s 和 t 为项, 则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。
- (ii) 若 R 为 n 元谓词符, 且 $t_1, \dots, t_n$ 为项, 则 $R(t_1, \dots, t_n)$ 为原子公式。

公式由以下(i)~(iv) (有限次使用) 生成。

- (i) 原子公式为公式;
- (ii) 若 A 为公式, 则 $(\neg A)$ 为公式;
- (iii) 若 A, B 为公式, 则 $(A * B)$ 为公式, 其中 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- (iv) 若 A, B 为公式且 x 为变元, 则 $\forall x. A$ 和 $\exists x. B$ 为公式。

- 1. 等词和谓词作用在项上。
- 2. 联结词和量词只能作用在公式上。



公式 (formula)

定义1.13 (公式) . 公式由以下(i)~(v) (有限次) 生成。

- (i) 若 s 和 t 为项, 则 $(s \doteq t)$ 为公式。
- (ii) 若 R 为 n 元谓词符, 且 $t_1, \dots, t_n$ 为项, 则 $R(t_1, \dots, t_n)$ 为公式。
- (iii) 若 A 为公式, 则 $(\neg A)$ 为公式;
- (iv) 若 A, B 为公式, 则 $(A * B)$ 为公式, 其中 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- (v) 若 A, B 为公式且 x 为变元, 则 $\forall x. A$ 和 $\exists x. B$ 为公式。



例，群论语言 $\mathcal{G}$ ：

常元符集为 $\{e\}$ ；

函数符集为 $\{\cdot \text{ (二元) }, ^{-1} \text{ (一元) }\}$ 。

$\mathcal{G}$ 的表达式：

$$\forall x. (\cdot (x, e) \doteq x \wedge \cdot (e, x) \doteq x)$$
$$(\forall x. ((\cdot (x, e) \doteq x) \wedge (\cdot (e, x) \doteq x)))$$

公式✓



例，群论语言 $\mathcal{G}$ ：

常元符集为 $\{e\}$ ；

函数符集为 $\{\cdot \text{ (二元)}, ^{-1} \text{ (一元)}\}$ 。

$$(\forall x. ((\cdot (x, e) \doteq x) \wedge (\cdot (e, x) \doteq x)))$$

为阅读方便，用 m 和 i 分别表示函数 $\cdot$ 和 $^{-1}$ 。

$$(\forall x. ((m(x, e) \doteq x) \wedge (m(e, x) \doteq x)))$$

$$(\forall x. ((m(x, e) \doteq x) \wedge (m(e, x) \doteq x)))$$

$$((m(x, e) \doteq x) \wedge (m(e, x) \doteq x))$$

$$(m(x, e) \doteq x)$$

$$(m(e, x) \doteq x)$$

$$m(x, e) \quad x$$

$$m(e, x) \quad x$$

由下向上生成。

例子

- 所有的牛都有角（前提）
有些动物是牛（前提）
因此，所有动物有角（结论）
- 对于所有 x ，如果 x 是牛，则 x 有角，
并且存在 y ， y 是动物，且 y 是牛，
则对于所有 z ，如果 z 是动物，则 z 有角。
- 谓词： $P(x)$ 表示 x 是牛， $Q(x)$ 表示 x 有角， $R(x)$ 表示 x 是动物。
 $((\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x))) \wedge (\exists y. (R(y) \wedge P(y))) \rightarrow (\forall z. (R(z) \rightarrow Q(z))))$



一阶逻辑

语义





结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。



结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为论域;

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为定义域, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

初等算术语言 $\mathcal{A}$:

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$;

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$;

谓词符集 $\mathcal{L}_p = \{<\}$ 。



结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为论域;

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为定义域, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

初等算术语言 $\mathcal{A}$:

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$;

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$;

谓词符集 $\mathcal{L}_p = \{<\}$ 。

令 $\mathbb{N} = (N, I)$, 其满足 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, $I(0) = 0$, $I(S) = suc$,

$I(+)=+$, $I(\cdot)=\times$, $I(<)=<$, 称 $\mathbb{N}$ 为初等算术的标准模型



结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。



结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。

符号



结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

$$\mathcal{L}_c \rightarrow M$$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。

符号



结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

$$\mathcal{L}_c \rightarrow M$$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

$$\mathcal{L}_f \rightarrow F$$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。

符号



结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

$$\mathcal{L}_c \rightarrow M$$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

$$\mathcal{L}_f \rightarrow F$$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

$$\mathcal{L}_P \rightarrow \mathbf{B} \cup M^n$$

符号



结构 (Structure)

定义 (结构) 1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

$$\mathcal{L}_c \rightarrow M$$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

$$\mathcal{L}_f \rightarrow F$$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

$$\mathcal{L}_P \rightarrow \mathbf{B} \cup \mathcal{M}$$

$$I(P) = \langle t_1, \dots, t_n \rangle \in \mathcal{M}$$

例如, “ $<$ ”可由 $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots\}$ 表示

符号



结构 (Structure)

约定: c_M 表示 $I(c)$, f_M 表示 $I(f)$, 且 P_M 表示 $I(P)$ 。

$\mathcal{L}$ 的结构给出了 $\mathcal{L}$ 的**元素的解释**。

➤ $I: \mathcal{L} \rightarrow M \cup F \cup \mathbf{B} \cup \mathcal{M}$

习惯上, 用论域 M 代表结构 $\mathbb{M}$, 即对 M 和 $\mathbb{M}$ 不加以区分。



赋值与模型

定义1.15. 设 $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots | n \in N\}$ 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集, $\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$ -结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射, 即 $\sigma: V \rightarrow M$;

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M}, \sigma)$,

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$ -结构且 σ 为 M 上的赋值。



赋值与模型

定义1.15. 设 $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots | n \in N\}$ 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集, $\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$ -结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射, 即 $\sigma: V \rightarrow M$;

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M}, \sigma)$, 也写成 (M, σ)

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$ -结构且 σ 为 M 上的赋值。



赋值与模型

定义1.15. 设 $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots | n \in N\}$ 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集, $\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$ -结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射, 即 $\sigma: V \rightarrow M$;

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M}, \sigma)$, 也写成 (M, σ)

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$ -结构且 σ 为 M 上的赋值。

($\mathcal{A}$ 的模型) 对于 $\mathbb{N} = (N, I)$, 其满足 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$,

令 $\sigma(x_n) = n$, (N, σ) 为 $\mathcal{A}$ 的模型。



项的解释

定义1.16（项的解释）. 设为 (M, σ) 一个 $\mathcal{L}$ -模型, t 为项, **项**

t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

- (1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;
- (2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;
- (3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.



项的解释

定义1.16（项的解释）. 设为 (M, σ) 一个 $\mathcal{L}$ -模型, t 为项, **项**

t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;

(3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

c_M 为 $I(c)$, f_M 为 $I(f)$



项的解释

定义1.16（项的解释）. 设为 (M, σ) 一个 $\mathcal{L}$ -模型, t 为项, **项**
 t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;

(3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

c_M 为 $I(c)$, f_M 为 $I(f)$

例, 对 $\mathcal{A}$ 的模型 (N, σ) , 求 $(+(x_1, S(x_7)))_{N[\sigma]}$.

$x_1 + S(x_7)$



项的解释

定义1.16 (项的解释). 设为 (M, σ) 一个 $\mathcal{L}$ -模型, t 为项, **项**
 t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;

(3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

c_M 为 $I(c)$, f_M 为 $I(f)$

例, 对 $\mathcal{A}$ 的模型 (N, σ) , 求 $(+(x_1, S(x_7)))_{N[\sigma]}$.

$$(+ (x_1, S(x_7)))_{N[\sigma]} = (x_1)_{N[\sigma]} + (S(x_7))_{N[\sigma]}$$

$$= \sigma(x_1) + suc(\sigma(x_7)) = 1 + suc(7) = 9$$

$I(+) = +$
 $I(S) = suc$
 $\sigma(x_1) = 1$
 $\sigma(x_7) = 7$



项的解释

定义1.16 (项的解释). 设为 (M, σ) 一个 $\mathcal{L}$ -模型, t 为项, **项**

t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

- (1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;
- (2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;
- (3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

引理3.14. $t_{M[\sigma]} \in M$.



项的解释

定义1.16 (项的解释). 设为 (M, σ) 一个 $\mathcal{L}$ -模型, t 为项, **项**

t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;

(3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

初等算术语言 $\mathcal{A}$:

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$;

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$;

谓词符集 $\mathcal{L}_p = \{<\}$.

引理1.17. $t_{M[\sigma]} \in M$.

对项 t 的结构作归纳。

1. $(x_i)_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) = i$;
2. $0_{N[\sigma]} = I(0) = 0$;
3. $(S(x_i))_{N[\sigma]} = \text{suc}(\sigma(x_i)) = \sigma(x_i) + 1$;
4. $(+(x_i, x_j))_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) + \sigma(x_j)$;
5. $(\cdot(x_i, x_j))_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) \times \sigma(x_j)$.



联结词的解释

我们把联结词解释为**B**上的函数：

(1) 对 $\neg$ 的解释 $B_{\neg}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$:

X	T	F
$B_{\neg}(X)$	F	T

(2) 对 $\wedge$ 的解释 $B_{\wedge}$:

X	Y	$B_{\wedge}(X, Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$\wedge$	T	F
T	T	F
F	F	F



联结词的解释

(3) 对 $\vee$ 的解释 $B_{\vee}$:

X	Y	$B_{\vee}(X, Y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$\vee$	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) 对 $\rightarrow$ 的解释 $B_{\rightarrow}$:

X	Y	$B_{\rightarrow}(X, Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\rightarrow$	T	F
T	T	F
F	T	T



联结词的解释

(3) 对 $\vee$ 的解释 $B_{\vee}$:

X	Y	$B_{\vee}(X, Y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

与命题逻辑的语义是一致的

$\vee$	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) 对 $\rightarrow$ 的解释 $B_{\rightarrow}$:

X	Y	$B_{\rightarrow}(X, Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\rightarrow$	T	F
T	T	F
F	T	T



公式的解释

定义1.18（公式的解释）. 设 (M, σ) 为一个 $\mathcal{L}$ -模型, A 为公式,
公式 A 的解释 $A_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

$$(1) (P(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \notin P_M. \end{cases}$$

$$(2) (t_1 \doteq t_2)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$$

$$(3) (\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]}).$$

$$(4) (A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_*(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]}).$$

$$(5) (\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$(6) (\exists x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{若 } \exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



公式的解释

定义1.18（公式的解释）. 设 (M, σ) 为一个 $\mathcal{L}$ -模型, A 为公式,
公式 A 的解释 $A_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

$$(1) (P(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \notin P_M. \end{cases}$$

$$(2) (t_1 \doteq t_2)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$$

$$(3) (\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]}).$$

$$(4) (A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_*(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]}).$$

$$(5) (\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$(6) (\exists x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{若 } \exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

变元 x 的赋值为 a ,
其它变元的赋值不变。



公式的解释

引理1.19. 对任何公式 A , $A_{M[\sigma]} \in \mathbf{B} = \{T, F\}$ 。

对公式 A 的结构作归纳。



公式的解释

例，对于上面 $\mathcal{A}$ 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

求 $(\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}$ 。

$$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$$



公式的解释

例，对于上面 $\mathcal{A}$ 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



公式的解释

例，对于上面 $\mathcal{A}$ 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

其中 $(< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$= \begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+ (x_1, x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} \rangle \in <_N; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



公式的解释

例，对于上面 $\mathcal{A}$ 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

其中 $(< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$= \begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+ (x_1, x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} \rangle \in <_N; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$(x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]} = (\sigma[x_3:=a])(x_3) = a$



公式的解释

例，对于上面 $\mathcal{A}$ 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$$\boxed{\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)}$$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

其中 $(< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$= \begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+ (x_1, x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} \rangle \in <_N; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$\boxed{(x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]} = (\sigma[x_3:=a])(x_3) = a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (+ (x_1, x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} &= (\sigma[x_3:=a])(x_1) + (\sigma[x_3:=a])(x_4) \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}}$$



公式的解释

例, 对于上面 $\mathcal{A}$ 的模型 (N, σ) , 其中 $\sigma(x_n) = n$,

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$\text{其中 } (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = \begin{cases} T, & a < 5; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



可满足

定义1.20. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, A 为 $\mathcal{L}$ 的公式, Γ 为 $\mathcal{L}$ 的公式集,

(M, σ) 为 $\mathcal{L}$ -模型。

$M \not\models_{\sigma} A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} A$, 指 $A_{M[\sigma]} = T$;

(2) A **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} A$;

(3) $M \models A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} A$;



可满足

定义1.20. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, A 为 $\mathcal{L}$ 的公式, Γ 为 $\mathcal{L}$ 的公式集,

(M, σ) 为 $\mathcal{L}$ -模型。

$M \not\models_{\sigma} A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} A$, 指 $A_{M[\sigma]} = T$;

(2) A **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} A$; $M \not\models A$ 指 $\exists \sigma, A_{M[\sigma]} = F$

(3) $M \models A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} A$;

(4) Γ 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 指对 $\forall A \in \Gamma, M \models_{\sigma} A$;

(5) Γ **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} \Gamma$;

(6) $M \models \Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 。



可满足

定义1.20. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, A 为 $\mathcal{L}$ 的公式, Γ 为 $\mathcal{L}$ 的公式集,

(M, σ) 为 $\mathcal{L}$ -模型。

$M \not\models_{\sigma} A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} A$, 指 $A_{M[\sigma]} = T$;

(2) A **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} A$; $M \not\models A$ 指 $\exists \sigma, A_{M[\sigma]} = F$

(3) $M \models A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} A$;

(4) Γ 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 指对 $\forall A \in \Gamma, M \models_{\sigma} A$;

(5) Γ **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} \Gamma$;

(6) $M \models \Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 。

$M \not\models_{\sigma} \Gamma$ 指 $\exists A \in \Gamma, A_{M[\sigma]} = F$

$M \not\models \Gamma$ 指 $\exists \sigma, M \not\models_{\sigma} \Gamma$

永真



定义1.21. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言, A 为 $\mathcal{L}$ 的公式, Γ 为 $\mathcal{L}$ 的公式集,
 (M, σ) 为 $\mathcal{L}$ -模型。

- (1) A 永真, 记为 $\models A$, 指对于任何模型 (M, σ) 有 $M \models_{\sigma} A$;
- (2) Γ 永真, 记为 $\models \Gamma$, 指对于任何模型 (M, σ) 有 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 。



语义结论

定义1.22. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言， A 为 $\mathcal{L}$ 的公式， Γ 为 $\mathcal{L}$ 的公式集， (M, σ) 为 $\mathcal{L}$ -模型。 A 为 Γ 的**语义结论**，记为 $\Gamma \models A$ ，指对于任何模型 (M, σ) ，若 $M \models_{\sigma} \Gamma$ ，则 $M \models_{\sigma} A$ 。

- $\Gamma \not\models A$ 表示 $\Gamma \models A$ 不成立
 - 即存在模型 (M, σ) ，使得 $M \models_{\sigma} \Gamma$ ， $M \not\models_{\sigma} A$
- $\emptyset \models A$ iff A 永真，即 $\models A$
- 若 $\Gamma \models A$ 且 $\Gamma \models \neg A$ ，则称 Γ **不一致**，或有**矛盾**



语义结论

- 例, $\mathcal{A} \models F$,
 - 若 $\mathcal{A}$ 为平面几何公理系统
 - 则 F 为平面几何中可由公理推出的命题

$\mathcal{A}$ 是一致的, 即没有矛盾



语义结论

- 例, $\mathcal{A} \models F$,
 - 若 $\mathcal{A}$ 为平面几何公理系统
 - 则 F 为平面几何中可由公理推出的命题
- 例, $ZFC \models F$
 - 其中, ZFC 为集合论公理系统ZF与选择公理AC的并集
 - 则 F 为可由ZFC推出的命题



语义结论

- 例，给定样本集合 E ，背景知识集合 B ，求假设 H ，使得

$$B, H \models E$$

- 此即归纳逻辑程序的机器学习问题。