南京大学
Nanjing University

预备知识

课程信息

- 课程前置知识要求：
  - 数理逻辑
- 教学立方（课程邀请码）
  - Y7M9CDZQ

南京大学
Nanjing University

预备知识-命题逻辑

字母表

定义1.1（字母表）． 命题逻辑的字母表含三类符号：

(1) 命题符号：

$$p \quad q \quad r \quad \ldots$$

(2) 联结符号（联结词）：

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$$

(3) 辅助符号（标点符号）：

$$(\quad)$$

命题公式

- 命题逻辑的所有原子公式和公式的集分别记为$\boldsymbol{PS}$（命题符集合）和$\boldsymbol{PROP}$（命题集）。
  - 公式由表达式定义
  - 公式相当于自然语言中符合语法规则的语句

命题公式

- 命题逻辑的所有原子公式和公式的集分别记为PS（命题符集合）和$PROP$（命题集）。
  - 公式由表达式定义
  - 公式相当于自然语言中符合语法规则的语句

- 表达式不一定是公式
  - p
  - pq
  - (r)
  - $p \wedge\!\rightarrow q$
  - $(p \vee q)$

命题的定义

定义1.2（$\boldsymbol{PROP}$）. $A \in PROP$当且仅当它能有限次地由以下 (i)~(iii)生成：

(i) $PS \subseteq PROP$；

(ii) 如果$A \in PROP$，则$(\neg A) \in PROP$；

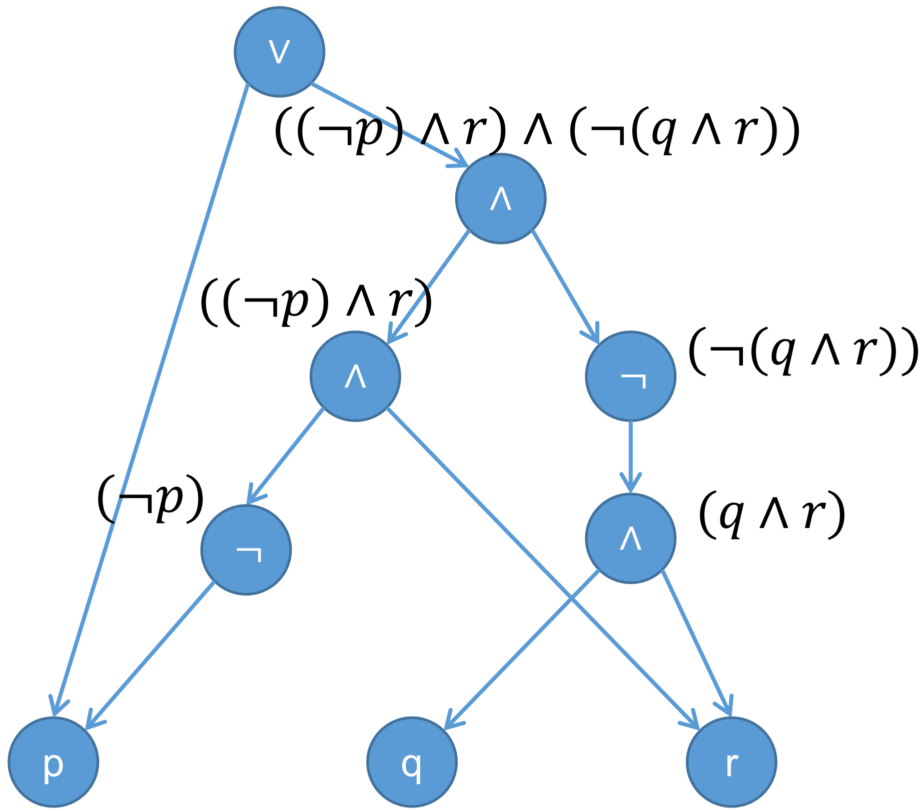
(iii) 如果$A, B \in PROP$，则$(A * B) \in PROP$。

其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。

- 定义中的(i)~(iii)称为命题公式的**形成规则**。

命题的定义

- 例，$(p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r))))$。



命题的语义

- 语法：符号表达式的形式结构
- 语义：符号和符号表达式的涵义（给符号以某种解释）

命题的语义

- 什么是命题逻辑的语义？

- 对于任意的**赋值** $v: PS \rightarrow \{T, F\}$，定义一个**解释**

$$\hat{v}: PROP \rightarrow \{T, F\}$$

联结词定义的布尔函数

定义1.3. 令真值集$\boldsymbol{B}=\{T,F\}$，

- 联结词 ¬ 被解释为一元函数 $H_\neg: \boldsymbol{B}\rightarrow\boldsymbol{B}$；
- 联结词 * 被解释为二元函数 $H_*: \boldsymbol{B}^2\rightarrow\boldsymbol{B}$，

  其中$*\in\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；
- $H_\neg, H_\wedge, H_\vee, H_\rightarrow$定义如下：

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$H_\neg(\boldsymbol{p})$	$H_\wedge(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$	$H_\vee(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$	$H_\rightarrow(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

命题的语义

定义1.4（命题的语义）.

- v 为一个**赋值**指它是函数 $v\colon PS \to \boldsymbol{B}$，

  从而对任何命题符P_i，$v(P_i)$为T或F；

命题的语义

定义1.4（命题的语义）.

- v 为一个**赋值**指它是函数 $v: PS \to \boldsymbol{B}$，

  从而对任何命题符P_i，$v(P_i)$为T或F；

- 对于任何赋值 v，定义 $\hat{v}: PROP \to \boldsymbol{B}$ 如下：

  $\hat{v}(P_n) = v(P_n), n \in N$；

  $\hat{v}(\neg A) = H_\neg(\hat{v}(A))$；

  $\hat{v}(A * B) = H_*(\hat{v}(A), \hat{v}(B))$，其中$* \in \{\wedge, \vee, \to\}$。

对于命题A，它在赋值v下的**解释** $\hat{v}(A)$ 为T或F。

命题的语义

例，$A = (p \wedge q) \to (\neg q \vee r)$，设 v 是一个赋值，使得

$$v(p) = v(q) = v(r) = 1.$$

命题的语义

例，$A=(p\wedge q)\to(\neg q\vee r)$，设 v 是一个赋值，使得

$$v(p)=v(q)=v(r)=1.$$

那么，我们有

$$\hat{v}(p\wedge q)=H_{\wedge}(p,q)=1,$$

$$\hat{v}(\neg q\vee r)=H_{\vee}(H_{\neg}(q),r)=1,$$

$$\hat{v}(A)=H_{\to}(H_{\wedge}(p,r),H_{\vee}(H_{\neg}(q),r))=1.$$

命题的语义

例，$A = (p \wedge q) \to (\neg q \vee r)$，设 v 是一个赋值，使得

$$v(p) = v(q) = v(r) = 0.$$

命题的语义

例，$A = (p \wedge q) \to (\neg q \vee r)$，设 v 是一个赋值，使得

$$v(p) = v(q) = v(r) = 0.$$

我们有

$$\hat{v}(p \wedge q) = H_{\wedge}(p, q) = 0,$$

$$\hat{v}(\neg q \vee r) = H_{\vee}(H_{\neg}(q), r) = 1,$$

$$\hat{v}(A) = H_{\to}(H_{\wedge}(p, q), H_{\vee}(H_{\neg}(q), r)) = 1.$$

可满足性

定义1.5. 设$A \in PROP$，v为赋值，$\Gamma \subseteq PROP$。

1. v **满足** A，记为 $v \vDash A$，指 $\hat{v}(A) = T$；

   A 是**可满足的**，指 $\exists v$ 使得 $v \vDash A$；

2. v **满足** Γ，记为 $v \vDash \Gamma$，指对于 $\forall B \in \Gamma$，$v \vDash B$；

   Γ 是**可满足的**，指 $\exists v$ 使得 $v \vDash \Gamma$。

注：若$v \nvDash A$，则$v \vDash \neg A$。

Γ的可满足性蕴含Γ中所有公式的可满足性。

但反之不一定成立。

元语言

- 注意⊨不是命题语言中的符号，而是元语言（也称上层语言）中的符号。

- 除此之外，在元语言中我们也需要使用一些联结词。
  - 如，iff（当且仅当）、not（非）、 and（与）、or（或）、imply（蕴含）等；
  - $v \vDash \neg A$ iff not $v \vDash A$；
  - $v \vDash (A \wedge B)$ iff $v \vDash A$ and $v \vDash B$；
  - $v \vDash (A \vee B)$ iff $v \vDash A$ or $v \vDash B$；
  - $v \vDash (A \rightarrow B)$ iff $v \vDash A$ implies $v \vDash B$。

永真式

定义1.6. 设A为命题，v为赋值。

1. A 为**永真式**（也称**重言式**），记为 $\vDash A$，

   指对于 $\forall v$ 都有 $\hat{v}(A) = T$；

2. A 为**矛盾式**，指对于 $\forall v$ 都有 $\hat{v}(A) = F$；

例，$A \to A$，

$\neg\neg A \to A$，

$(A \land B) \to (B \land A)$.

语义结论

定义1.7. 设$A \in PROP$，v为赋值，$\Gamma \subseteq PROP$。

A 是 Γ 的**语义结论**（也称**逻辑推论**），记为 $\Gamma \vDash A$，

指对所有 v，若$v \vDash \Gamma$，则 $v \vDash A$。

注：此处 $\vDash$ 也是元语言中的符号，

$\Gamma \vDash A$ 也可以读作"Γ逻辑地蕴含A"，

$\Gamma \vDash A$ 不是形式语言中的公式，是元语言中的命题。

逻辑等价

定义1.8. 设 A, B 为命题，A 与 B 逻辑等价（也称逻辑等值），记为$A \simeq B$，指对于任意赋值 v，$v \vDash A$ 当且仅当 $v \vDash B$。

注：有如下等价的定义：

$A \simeq B$，当且仅当 $A \vDash B$ 且 $B \vDash A$。

任何赋值 v，$\hat{v}(A) = \hat{v}(B)$。

等值替换

（1）$A \to B \simeq \neg A \vee B$；

（2）$A \leftrightarrow B \simeq (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$；

（3）$A \leftrightarrow B \simeq (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$；

（4）$A \oplus B \simeq (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \simeq \neg(A \leftrightarrow B)$；

(1)~(4)：消去$\to$，$\leftrightarrow$，$\oplus$

可以说，$\to$, $\leftrightarrow$, $\oplus$可以由$\neg$, $\wedge$, $\vee$定义。

等值替换

（1）$A \to B \simeq \neg A \vee B$；

(1)~(4)：消去→，↔，⊕

（2）$A \leftrightarrow B \simeq (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$；

（3）$A \leftrightarrow B \simeq (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$；

（4）$A \oplus B \simeq (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \simeq \neg(A \leftrightarrow B)$；

（5）$\neg\neg A \simeq A$；

(5)~(7)：消去¬的辖域中的¬，∧，∨

（6）$\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \simeq \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$；

（7）$\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \simeq \neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n$；

等值替换

（1）$A \to B \simeq \neg A \vee B$；

（2）$A \leftrightarrow B \simeq (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$；

(1)~(4)：消去→，↔，⊕

（3）$A \leftrightarrow B \simeq (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$；

（4）$A \oplus B \simeq (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \simeq \neg(A \leftrightarrow B)$；

（5）$\neg\neg A \simeq A$；

(5)~(7)：消去¬的辖域中的¬，∧，∨

（6）$\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \simeq \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$；

（7）$\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \simeq \neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n$；

(8)：消去∧的辖域中的∨
(9)：消去∨的辖域中的∧

（8）$A \wedge (B_1 \vee \ldots \vee B_n) \simeq (A \wedge B_1) \vee \ldots \vee (A \wedge B_n)$；

（9）$A \vee (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \simeq (A \vee B_1) \wedge \ldots \wedge (A \vee B_n)$.

等值替换

（10）$A \vee A \simeq A$

（11）$A \wedge A \simeq A$

(10)(11)：重复项

（12）$A \vee (A \wedge B) \simeq A$

（13）$A \wedge (A \vee B) \simeq A$

(12)(13)：一个子句的所有文字出现在另一个子句中

（14）$A \vee (B \wedge \neg B \wedge C) \simeq A$

（15）$A \wedge (B \vee \neg B \vee C) \simeq A$

(14)(15)：删去含互补文字的子句

析取范式-合取范式

定义1.9（文字，子句）.

（1）命题符和命题符的否定式称为文字（Literal）；

（2）以文字为析（合）取项的析（合）取式称为析（合）取子式，简称子式，也称子句（Clause）。

析取范式-合取范式

定义1.10（范式 Normal Form）.

（1）命题A为**析取范式**（∨∧-nf，DNF），指A为 m 个合取子式的析取式，呈形$\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n_i} P_{i,k})$。

（2）命题A为**合取范式**（∧∨-nf，CNF），指A为 l 个析取子式的合取式，呈形$\bigwedge_{j=1}^{l}(\bigvee_{k=1}^{n_j} Q_{j,k})$。

以上

- $\bigwedge_{k=1}^{n} B_k$ 为 $(\ldots(((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3)\ldots \wedge B_n)\ldots)$ 的简写；
- $\bigvee_{k=1}^{n} B_k$ 为 $(\ldots(((B_1 \vee B_2) \vee B_3)\ldots \vee B_n)\ldots)$ 的简写。

析取范式-合取范式

析取范式$\vee_{i=1}^{m}(\wedge_{k=1}^{n} P_{i,k})$为如下形式：

$$(P_{11} \wedge \ldots \wedge P_{1n_1}) \vee \ldots \vee (P_{m1} \wedge \ldots \wedge P_{mn_m}),$$

文字

析取范式-合取范式

析取范式$\vee_{i=1}^{m}(\wedge_{k=1}^{n} P_{i,k})$为如下形式：

$$(P_{11} \wedge \ldots \wedge P_{1n_1}) \vee \ldots \vee (P_{m1} \wedge \ldots \wedge P_{mn_m}),$$

子句

析取范式-合取范式

析取范式$\vee_{i=1}^{m}(\wedge_{k=1}^{n} P_{i,k})$为如下形式：

$$(P_{11} \wedge \ldots \wedge P_{1n_1}) \vee \ldots \vee (P_{m1} \wedge \ldots \wedge P_{mn_m}),$$

合取范式$\wedge_{j=1}^{l}(\vee_{k=1}^{n} Q_{j,k})$为如下形式：

$$(Q_{11} \wedge \ldots \wedge Q_{1n_1}) \vee \ldots \vee (Q_{l1} \wedge \ldots \wedge Q_{ln_l}).$$

析取范式-合取范式

析取范式$\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n}P_{i,k})$为如下形式：

$$(P_{11}\wedge\ldots\wedge P_{1n_1})\vee\ldots\vee(P_{m1}\wedge\ldots\wedge P_{mn_m}),$$

合取范式$\bigwedge_{j=1}^{l}(\bigvee_{k=1}^{n}Q_{j,k})$为如下形式：

$$(Q_{11}\wedge\ldots\wedge Q_{1n_1})\vee\ldots\vee(Q_{l1}\wedge\ldots\wedge Q_{ln_l}).$$

一个析（合）取范式的每个子句都包含这个公式的所有原子公式，且每个子句都不相同，称为**完全析（合）取范式**。

析取范式-合取范式

例，

（1）p

（2）$\neg p \vee q$

（3）$\neg p \wedge q \wedge \neg r$

（4）$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

（5）$\neg p \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r)$

预备知识-一阶逻辑

例子

- 所有的牛都有角（前提）
  有些动物是牛（前提）
  因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确

例子

- 所有的牛都有角（前提）
  有些动物是牛（前提）
  因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确

- 量词
  - 超出命题逻辑语言的表达能力
  - p为“所有的牛都有角”，q为“有些动物是牛”，r为“所有动物有角”
  - $(p \land q) \rightarrow r$，无法判断推理的正确性
- 谓词
  - “xx有角”，“xx是牛”

一阶逻辑语言的字母表

定义1.11. 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 V：可数无穷集 $V = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$

联结词：$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

量词：$\forall \quad \exists$

等词：$\doteq$

辅助符：( ) . ,

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

一阶逻辑语言的字母表

定义1.11. 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 V：可数无穷集 $V = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$

联结词：$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

量词：$\forall \quad \exists$

等词：$\doteq$

辅助符：( ) . ,

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

1. 与命题符不同
2. $|V| = |N|$

一阶逻辑语言的字母表

定义1.11. 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 V：可数无穷集 $V = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$

联结词：$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

量词：$\forall \quad \exists$

等词：$\doteq$

辅助符：( ) . ,

完全子集$\{\neg, \rightarrow\}$

1. 与命题符不同

2. $|V| = |N|$

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

一阶逻辑语言的字母表

定义1.11. 一阶语言的字母表由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合：

变元集 V：可数无穷集 $V = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$

联结词：$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

量词：$\forall \quad \exists$

等词：$\doteq$

辅助符：( ) . ,

1. 与命题符不同

2. $|V| = |N|$

完全子集$\{\neg, \rightarrow\}$

与联结词$\leftrightarrow$不同

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

一阶逻辑语言的字母表

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

(a) $\mathcal{L}_c$ 由可数（包括0个）**常元符**组成，$\mathcal{L}_c = \{c_0, c_1, ...\}$。

(b) $\mathcal{L}_f$（函数集）由可数**函数符**组成，$\mathcal{L}_f = \{f_0, f_1, ...\}$，对每个函数符$f$，赋予一个正整数$\mu(f)$，为$f$的元数。

(c) $\mathcal{L}_P$（谓词集）由可数**谓词符**组成，$\mathcal{L}_P = \{P_0, P_1, ...\}$，对每个谓词符$P$，赋予一个非负整数$\mu(P)$，为$P$的元数。

一阶逻辑语言的字母表

(2) 非逻辑符集合 $\mathcal{L}$ 由以下组成：

(a) $\mathcal{L}_c$ 由可数（包括0个）**常元符**组成，$\mathcal{L}_c = \{c_0, c_1, \ldots\}$。

(b) $\mathcal{L}_f$（函数集）由可数**函数符**组成，$\mathcal{L}_f = \{f_0, f_1, \ldots\}$，对每个函数符$f$，赋予一个正整数$\mu(f)$，为$f$的元数。

(c) $\mathcal{L}_P$（谓词集）由可数**谓词符**组成，$\mathcal{L}_P = \{P_0, P_1, \ldots\}$，对每个谓词符$P$，赋予一个非负整数$\mu(P)$，为$P$的元数。

1. 谓词也称关系符号
2. 等词$\doteq$是一个特别的谓词
3. $\mu(P) = 0$时，称P为命题符
4. $\mathcal{L}_f$和$\mathcal{L}_P$可以为空集

字母表的一些说明

例，初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集为 $\{0\}$；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$；

谓词符集为 $\{<\}$。

字母表的一些说明

例，初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集为 $\{0\}$；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$；

谓词符集为 $\{<\}$。

S为后继函数（一元）
$S(n) = n + 1$（语义层面）

$\mathcal{A}$的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists \forall S(+(x_0, x_1))$$

字母表的一些说明

例，初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集为 $\{0\}$；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$；

谓词符集为 $\{<\}$。

S为后继函数（一元）
$S(n) = n + 1$（语义层面）

$\mathcal{A}$的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists \forall S(+(x_0, x_1))$$

$\cdot (x, 0) \doteq 0$
$x \cdot 0 \doteq 0$

字母表的一些说明

例，初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集为 $\{0\}$；

函数符集为 $\{S, +, \cdot\}$；

谓词符集为 $\{<\}$。

S为后继函数（一元）
$S(n) = n + 1$（语义层面）

$\mathcal{A}$的表达式（符号串）：

$$\forall x. \cdot (x, 0) \doteq 0$$

$$\exists \forall S(+(x_0, x_1))$$

$\cdot (x, 0) \doteq 0$
$x \cdot 0 \doteq 0$

表达式不一定是公式

字母表的一些说明

例，群论语言$\mathfrak{G}$：

常元符集为 $\{e\}$；

函数符集为 $\{\cdot$ （二元），$^{-1}$ （一元）$\}$。

$\mathfrak{G}$的表达式：

$$\forall x.(\cdot(x,e) \doteq x \wedge \cdot(e,x) \doteq x)$$

项（term）

定义1.12（项）．项是指由以下的(i)~(iii)（有限次使用）生成。

(i) 每个变元符为项；

(ii) 每个常元符为项；

(iii) 若f为n元函数，$t_1, ..., t_n$为项，则$f(t_1, ..., t_n)$为项。

归纳定义

公式（formula）

定义1.13（公式）． 原子公式由以下(i)(ii)（有限次）生成。

(i) 若 s 和 t 为项，则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。

(ii) 若R为n元谓词符，且$t_1, \ldots, t_n$为项，则$R(t_1, \ldots, t_n)$为原子公式。

公式由以下(i)~(iv)（有限次使用）生成。

(i) 原子公式为公式；

(ii) 若A为公式，则$(\neg A)$为公式；

(iii) 若A, B为公式，则$(A * B)$为公式，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(iv) 若A, B为公式且x为变元，则$\forall x. A$和$\exists x. B$为公式。

公式（formula）

定义1.13（公式）．原子公式由以下(i)(ii)（有限次）生成。

(i) 若 s 和 t 为项，则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。

(ii) 若R为n元谓词符，且$t_1, \ldots, t_n$为项，则$R(t_1, \ldots, t_n)$为原子公式。

公式由以下(i)~(iv)（有限次使用）生成。

(i) 原子公式为公式；

(ii) 若A为公式，则$(\neg A)$为公式；

(iii) 若A, B为公式，则$(A * B)$为公式，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(iv) 若A, B为公式且x为变元，则$\forall x. A$和$\exists x. B$为公式。

若f和g为函数符，

$\neg f(x)$ ✘

$f(x) \wedge g(x, y)$ ✘

公式（formula）

定义1.13（公式）．原子公式由以下(i)(ii)（有限次）生成。

(i) 若 s 和 t 为项，则 $(s \doteq t)$ 为原子公式。

(ii) 若R为n元谓词符，且$t_1, \ldots, t_n$为项，则$R(t_1, \ldots, t_n)$为原子公式。

公式由以下(i)~(iv)（有限次使用）生成。

(i) 原子公式为公式；

(ii) 若A为公式，则$(\neg A)$为公式；

(iii) 若A, B为公式，则$(A * B)$为公式，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(iv) 若A, B为公式且x为变元，则$\forall x. A$和$\exists x. B$为公式。

1. 等词和谓词作用在项上。
2. 联结词和量词只能作用在公式上。

公式（formula）

定义1.13（公式）． 公式由以下(i)~(v)（有限次）生成。

(i) 若 s 和 t 为项，则 $(s \doteq t)$ 为公式。

(ii) 若R为n元谓词符，且$t_1, \ldots, t_n$为项，则$R(t_1, \ldots, t_n)$为公式。

(iii) 若A为公式，则$(\neg A)$为公式；

(iv) 若A, B为公式，则$(A * B)$为公式，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$；

(v) 若A, B为公式且x为变元，则$\forall x. A$和$\exists x. B$为公式。

例，群论语言$\mathfrak{G}$：

常元符集为 $\{e\}$；

函数符集为 $\{\cdot$（二元），${}^{-1}$（一元）$\}$。

$\mathfrak{G}$的表达式：

$$\forall x.(\cdot(x,e) \doteq x \wedge \cdot(e,x) \doteq x)$$

$$(\forall x.((\cdot(x,e) \doteq x) \wedge (\cdot(e,x) \doteq x)))$$

$\boxed{\text{公式✔}}$

例，群论语言$\mathfrak{G}$：

常元符集为 $\{e\}$；

函数符集为 $\{\cdot$ （二元），$^{-1}$（一元）$\}$。

$$(\forall x.((\cdot(x,e) \doteq x) \wedge (\cdot(e,x) \doteq x)))$$

为阅读方便，用m和i分别表示函数·和 $^{-1}$。

$$(\forall x.((m(x,e) \doteq x) \wedge (m(e,x) \doteq x)))$$

$$(\forall x.((m(x,e) \doteq x) \wedge (m(e,x) \doteq x)))$$

$$((m(x,e) \doteq x) \wedge (m(e,x) \doteq x))$$

$$(m(x,e) \doteq x) \qquad (m(e,x) \doteq x)$$

$$m(x,e) \qquad x \qquad m(e,x) \qquad x$$

由下向上生成。

例子

- 所有的牛都有角（前提）
  有些动物是牛（前提）
  因此，所有动物有角（结论）

- 对于所有x，如果x是牛，则x有角，
  并且存在y，y是动物，且y是牛，
  则对于所有z，如果z是动物，则z有角。

- 谓词：$P(x)$表示x是牛，$Q(x)$表示x有角，$R(x)$表示x是动物。
  $((\forall x.(P(x) \to Q(x))) \wedge (\exists y.(R(y) \wedge P(y)))) \to (\forall z.(R(z) \to Q(z)))$

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$；

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$；

谓词符集 $\mathcal{L}_P = \{<\}$。

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

初等算术语言$\mathcal{A}$：

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$；

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$；

谓词符集 $\mathcal{L}_P = \{<\}$。

令 $\mathbb{N} = (N, I)$，其满足 $N = \{0,1,2,...\}$，$I(0) = 0$，$I(S) = suc$，$I(+) = +$，$I(\cdot) = \times$，$I(<) = <$，称 $\mathbb{N}$ 为**初等算术的标准模型**

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

$I: \mathcal{L} \to ?$

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

$I: \mathcal{L} \to ?$

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

符号

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

$I: \mathcal{L} \to ?$

$\mathcal{L}_c \to M$

符号

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

$I: \mathcal{L} \to ?$

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；　　$\mathcal{L}_c \to M$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；　　$\mathcal{L}_f \to F$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

符号

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

$I: \mathcal{L} \to ?$

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

$\mathcal{L}_c \to M$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

$\mathcal{L}_f \to F$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

$\mathcal{L}_P \to \mathbf{B} \cup M^n$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

符号

结构（Structure）

定义（结构）1.14. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

$I: \mathcal{L} \to ?$

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

$\mathcal{L}_c \to M$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

$\mathcal{L}_f \to F$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

$\mathcal{L}_P \to \mathbf{B} \cup \mathcal{M}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

符号

$I(P) = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in \mathcal{M}$

例如，“<”可由 $\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \ldots\}$ 表示

结构（Structure）

约定：c_M 表示 $I(c)$，f_M 表示 $I(f)$，且 P_M 表示 $I(P)$。

$\mathcal{L}$ 的结构给出了 $\mathcal{L}$ 的**元素的解释**。

- $I: \mathcal{L} \to M \cup F \cup \mathbf{B} \cup \mathcal{M}$

习惯上，用论域 M 代表结构 $\mathbb{M}$，即对 M 和 $\mathbb{M}$ 不加以区分。

赋值与模型

定义1.15. 设 $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots|n\in N\}$为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集，$\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射，即 $\sigma: V\to M$；

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M},\sigma)$，

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$-结构且 σ 为 M 上的赋值。

赋值与模型

定义1.15. 设 $V=\{x_0,x_1,...,x_n,...|n\in N\}$为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集，$\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射，即 $\sigma: V\to M$；

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M},\sigma)$，

也写成 (M,σ)

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$-结构且 σ 为 M 上的赋值。

赋值与模型

定义1.15. 设 $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots|n\in N\}$为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集，$\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射，即 $\sigma: V\to M$；

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M},\sigma)$，

也写成 (M,σ)

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$-结构且 σ 为 M 上的赋值。

（$\mathcal{A}$的模型）对于 $\mathbb{N}=(N,I)$，其满足 $N=\{0,1,2,\ldots\}$，……

令 $\sigma(x_n)=n$，(N,σ) 为 $\mathcal{A}$ 的模型。

项的解释

定义1.16（项的解释）．设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1, \ldots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \ldots, (t_n)_{M[\sigma]})$。

项的解释

定义1.16（项的解释）． 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项 t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

c_M为$I(c)$，f_M为$I(f)$

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

项的解释

定义1.16（项的解释）． 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项 t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

c_M为$I(c)$，f_M为$I(f)$

例，对$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，求$(+(x_1,S(x_7)))_{N[\sigma]}$。

$x_1 + S(x_7)$

项的解释

定义1.16（项的解释）．设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项 t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

c_M为$I(c)$，f_M为$I(f)$

例，对$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，求$(+(x_1,S(x_7)))_{N[\sigma]}$。

$I(+) =+$
$I(S) = suc$
$\sigma(x_1) = 1$
$\sigma(x_7) = 7$

$$(+(x_1,S(x_7)))_{N[\sigma]} = (x_1)_{N[\sigma]} + (S(x_7))_{N[\sigma]}$$

$$= \sigma(x_1) + suc(\sigma(x_7)) = 1 + suc(7) = 9$$

项的解释

定义1.16（项的解释）. 设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项 t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,...,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},...,(t_n)_{M[\sigma]})$。

引理3.14. $t_{M[\sigma]} \in M$。

项的解释

定义1.16（项的解释）．设为(M,σ)一个 $\mathcal{L}$-模型，t 为项，**项 t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

引理1.17. $t_{M[\sigma]} \in M$。

对项t的结构作归纳。

1. $(x_i)_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) = i$；
2. $0_{N[\sigma]} = I(0) = 0$；
3. $(S(x_i))_{N[\sigma]} = suc(\sigma(x_i)) = \sigma(x_i) + 1$；
4. $(+(x_i, x_j))_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) + \sigma(x_j)$；
5. $(\cdot\,(x_i, x_j))_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) \times \sigma(x_j)$。

联结词的解释

我们把联结词解释为**B**上的函数：

(1) 对¬的解释$B_{\neg}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$：

X	T	F
$B_{\neg}(X)$	F	T

(2) 对∧的解释$B_{\wedge}$：

X	Y	$B_{\wedge}(X, Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

∧	T	F
T	T	F
F	F	F

联结词的解释

(3) 对∨的解释$B_\vee$：

X	Y	$B_\vee(X,Y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

∨	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) 对→的解释$B_\rightarrow$：

X	Y	$B_\rightarrow(X,Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

→	T	F
T	T	F
F	T	T

联结词的解释

(3) 对∨的解释$B_\vee$：

与命题逻辑的语义是一致的

X	Y	$B_\vee(X,Y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

∨	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) 对→的解释$B_\rightarrow$：

X	Y	$B_\rightarrow(X,Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

→	T	F
T	T	F
F	T	T

公式的解释

定义1.18（公式的解释）． 设(M,σ)为一个 $\mathcal{L}$-模型，A为公式，公式A的解释$A_{M[\sigma]}$归纳定义如下：

(1) $(P(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]} \rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]} \rangle \notin P_M. \end{cases}$

(2) $(t_1 \doteq t_2))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$

(3) $(\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]})$.

(4) $(A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{*}(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$.

(5) $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对}\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$

(6) $(\exists x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{若}\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$

公式的解释

定义1.18（公式的解释）． 设(M,σ)为一个 $\mathcal{L}$-模型，A为公式，**公式A的解释$A_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $(P(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \notin P_M. \end{cases}$

(2) $(t_1 \doteq t_2))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$

(3) $(\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_\neg(A_{M[\sigma]})$.

(4) $(A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_*(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$.

(5) $(\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对}\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$

(6) $(\exists x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{若}\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$

变元x的赋值为a，
其它变元的赋值不变。

公式的解释

引理1.19. 对任何公式A，$A_{M[\sigma]} \in \mathbf{B} = \{T, F\}$。

对公式A的结构作归纳。

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N, σ)，其中$\sigma(x_n) = n$，

求$(\forall x_3.(< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\boxed{\forall x_3.(x_3 < x_1 + x_4)}$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$$\forall x_3.(x_3 < x_1 + x_4)$$

$$=\begin{cases} T, & 对\forall a\in N, (<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\forall x_3.(x_3 < x_1 + x_4)$

$$=\begin{cases} T, & 对\forall a \in N, (<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

其中 $(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$=\begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+(x_1,x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} \rangle \in <_N; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\forall x_3.(x_3 < x_1 + x_4)$

$$= \begin{cases} T, & 对\forall a \in N, (<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

其中 $(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$= \begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+(x_1,x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} \rangle \in <_N; \\ F, & 否则. \end{cases}$$

$(x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]} = (\sigma[x_3:=a])(x_3) = a$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$\forall x_3.(x_3 < x_1 + x_4)$

$$=\begin{cases} T, & \text{对}\forall a\in N,(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=T; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$$

其中 $(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$=\begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]},(+(x_1,x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]}\rangle \in <_N; \\ F, & \text{否则}. \end{cases}$$

$(x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}=(\sigma[x_3:=a])(x_3)=a$

$(+(x_1,x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]}=(\sigma[x_3:=a])(x_1)+(\sigma[x_3:=a])(x_4)$
$=1+4=5$

公式的解释

例，对于上面$\mathcal{A}$的模型(N,σ)，其中$\sigma(x_n)=n$，

求$(\forall x_3.(<(x_3,+(x_1,x_4))))_{N[\sigma]}$.

$$\boxed{\forall x_3.(x_3 < x_1 + x_4)}$$

$$=\begin{cases} T, & \text{对}\forall a \in N, (<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

其中 $(<(x_3,+(x_1,x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = \begin{cases} T, & a < 5; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$

可满足

定义1.20. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

$M \nvDash_\sigma A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M,σ) 可满足，记为 $M \vDash_\sigma A$，指 $A_{M[\sigma]} = T$；

(2) A 可满足指存在 (M,σ) 使得 $M \vDash_\sigma A$；

(3) $M \vDash A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \vDash_\sigma A$；

可满足

定义1.20. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

$M \nvDash_\sigma A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M \vDash_\sigma A$，指 $A_{M[\sigma]} = T$；

(2) A **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M \vDash_\sigma A$；

$M \nvDash A$ 指 $\exists\sigma$，$A_{M[\sigma]} = F$

(3) $M \vDash A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \vDash_\sigma A$；

(4) Γ 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M \vDash_\sigma \Gamma$ 指对 $\forall A \in \Gamma$，$M \vDash_\sigma A$；

(5) Γ **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M \vDash_\sigma \Gamma$；

(6) $M \vDash \Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \vDash_\sigma \Gamma$。

可满足

定义1.20. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

$M\nvDash_{\sigma}A$ 指 $A_{M[\sigma]}=F$

(1) A 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M\vDash_{\sigma}A$，指 $A_{M[\sigma]}=T$；

(2) A **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M\vDash_{\sigma}A$；

$M\nvDash A$ 指 $\exists\sigma$，$A_{M[\sigma]}=F$

(3) $M\vDash A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M\vDash_{\sigma}A$；

(4) Γ 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M\vDash_{\sigma}\Gamma$ 指对 $\forall A\in\Gamma$，$M\vDash_{\sigma}A$；

(5) Γ **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M\vDash_{\sigma}\Gamma$；

(6) $M\vDash\Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M\vDash_{\sigma}\Gamma$。

$M\nvDash_{\sigma}\Gamma$ 指 $\exists A\in\Gamma$，$A_{M[\sigma]}=F$

$M\nvDash\Gamma$ 指 $\exists\sigma$，$M\nvDash_{\sigma}\Gamma$

永真

定义1.21. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M, σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

(1) A**永真**，记为$\vDash A$，指对于任何模型 (M, σ) 有 $M \vDash_\sigma A$；

(2) Γ**永真**，记为$\vDash \Gamma$，指对于任何模型 (M, σ) 有 $M \vDash_\sigma \Gamma$。

语义结论

定义1.22. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。A为Γ的**语义结论**，记为$\Gamma \vDash A$，指对于任何模型 (M,σ)，若$M \vDash_\sigma \Gamma$，则 $M \vDash_\sigma A$。

- $\Gamma \nvDash A$ 表示 $\Gamma \vDash A$ 不成立
  - 即存在模型 (M,σ)，使得 $M \vDash_\sigma \Gamma$，$M \nvDash_\sigma A$
- $\emptyset \vDash A$ iff A永真，即$\vDash A$